

CONCRETO ARMADO – DIMENSIONAMENTO

NBR-6118(2003)

Notas de aulas da disciplina

Concreto Armado

Parte 1

Prof. Dr. Gilson B. Fernandes

SUMÁRIO

1.1		FUNDAMENTOS DO CONCRETO ARMADO
2.1		AÇÕES E SEGURANÇA NAS ESTRUTURAS
3.1		DURABILIDADE DAS ESTRUTURAS
4.1		ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS PARA SOLICITAÇÕES NORMAIS
5.1		FLEXÃO NORMAL SIMPLES
6.1		FLEXÃO NORMAL COMPOSTA – FORÇA NORMAL COMPRESSÃO
7.1		FLEXÃO NORMAL COMPOSTA – FORÇA NORMAL TRAÇÃO
8.1		FLEXÃO COMPOSTA NORMAL E OBLÍQUA EM SEÇÕES COM ARMADURAS SIMÉTRICAS
9.1		PILARES USUAIS DE EDIFÍCIOS
10.1		ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO
A.1		ANEXOS

1 – FUNDAMENTOS DO CONCRETO ARMADO

1.1 - Histórico

O emprego da pedra e da madeira como material de construção é conhecido há quase três mil anos. No entanto, a utilização do concreto, produzido com cimento como aquele conhecido atualmente, conta com pouco mais de um século de idade.

O concreto é um material de construção composto por quantidades racionais aglomerante, agregados e água. Eventualmente, o concreto poderá conter aditivos com a finalidade de alterar suas características tornando-as mais adequadas ao tipo de obra a ser executada. Logo após a mistura, o concreto deve oferecer condições de plasticidade que facilitem as operações de manuseio, indispensáveis ao lançamento nas formas, adquirindo com o tempo, pelas reações que se processam entre o aglomerante e a água, coesão e resistência.

Nas aplicações estruturais, o aglomerante usualmente empregado é o cimento Portland. Em casos especiais outros tipos de cimento podem ser empregados.

O agregado é constituído de agregado miúdo (areia) e agregado graúdo (pedra britada ou pedregulho).

A água destinada ao amassamento do concreto deve ser isenta de teor de sais prejudiciais de substâncias estranhas. A água oferecida ao abastecimento da rede pública é adequada.

Entre os aditivos encontram-se os impermeabilizantes, os retardadores de pega, os aceleradores de endurecimento e pega, os incorporadores de ar, os plastificantes e os superplastificantes.

O concreto atual é consequência da evolução da argamassa do passado. A argamassa passou por transformações desde a Antiguidade, motivadas por outras transformações ocorridas na composição e no processo de fabricação dos aglomerantes, que forneceram como resultado o cimento que é conhecido hoje. Por isso, o concreto se assumiu a posição de principal material usado na construção civil depois que o desenvolvimento desse agente cimentante se consolidou. Grande impulso nessa direção se deve à invenção do cimento Portland, em 1824, atribuída a *Joseph Aspdin*.

Em 21 de outubro de 1824, *Joseph Aspdin* (1778-1855), construtor em Leeds, Inglaterra, obteve a Patente No. 5022 para fabricação de um cimento novo e melhorado, obtido pelo cozimento de argila com calcário que ele chamou de *cimento Portland*. Esse nome se deve à semelhança da cor e de qualidade do cimento endurecido com a pedra encontrada na ilha de Portland - um calcário extraído em Dorset, Inglaterra.

A ideia de utilização do concreto como material de construção deve provavelmente ter surgido da possibilidade de aproveitar a grande resistência à compressão e a durabilidade oferecidas pela pedra e do reconhecimento da variação de sua mistura com agregado miúdo, aglomerante e água resultar num material de boa trabalhabilidade que, antes de endurecer pode ser moldado nas formas desejadas.

O concreto simples é um material de aplicação restrita na construção de estruturas pelo fato de possuir resistência a tração bastante baixa para esse fim (3 a 10 vezes menor que a resistência à compressão). Entretanto, sua associação com um material de boa resistência à tração colocado nas regiões traçionadas dos elementos que compõem as estruturas permite que o conjunto - concreto armado - possa resistir tanto os esforços de compressão quanto os de tração. Esse material que se associa ao concreto com essa finalidade é denominado armadura.

A ideia de associar o concreto com armadura é bastante antiga.

Em 1849, *Joseph Louis Lambot* (1814-1887) usou argamassa de cimento e um esqueleto de varões de ferro para construir um barco movido a remos. Na época *Lambot* possuía uma propriedade em Merval, perto de Eindhoven, na França. No lugar existia um pequeno lago onde ele e seus filhos costumavam passar de barco. Provavelmente, *Lambot* tinha encontrado dificuldades com a manutenção de sua embarcação de madeira e, por isso, teria tomado a iniciativa

de construir um barco de concreto para diminuir suas preocupações com o problema. Esse barco se tornou o primeiro artefato feito de concreto armado com reconhecida importância e hoje é considerado o marco inicial da história do concreto armado como material de construção.

Lambot construiu um segundo barco igual ao barco pioneiro e o apresentou na *Exposição Universel de Paris* realizada em 1855. Nesse ano ele obteve a patente para a primeira associação de ferro e concreto.

Ainda em 1849, também na França, *Joseph Monier* (1823-1906) usou argamassa de cimento e barras de ferro para fabricar vasos de flores e cubas. Na sua atividade de jardineiro e horticultor, provavelmente tivesse encontrado dificuldades com a preservação das caixas de madeira onde cultivava suas plantas, que se apodreciam por causa da umidade. Esta sua invenção lhe permitiu substituir as caixas de madeira que continham suas mudas de laranjeira por caixas de argamassa armada. *Monier* usou essa técnica construtiva por vários anos e só em 1867 resolveu patentear sua invenção. Várias outras patentes foram obtidas por ele nos anos seguintes.

O nascimento do concreto armado parece situar-se nas patentes de *Joseph Monier* de 1867 a 1880. A primeira dessas patentes foi aquela que se referia à fabricação de vasos de flores e bacias armados com malha de ferros redondos ou quadrados (1867). As seguintes se referem a tubos (1869), lajes (1869), passarelas em arco (1873) e dormientes (1877). As últimas visavam a construção de arcos e vigas T com armaduras metálicas (1878) e lajes com ferros perfilados e ferros chatos (1880).

Entretanto, a invenção do concreto armado não pode ser atribuída a uma só pessoa. Embora alguns autores a atribuam a *Monier*, muitas outras pessoas deram sua contribuição ao desenvolvimento da nova técnica construtiva na sua fase pioneira, como *F. Colignet*, *T. Hyatt*, *W. E. Ward*, *F. Hennebique* e outros, além de *Lambot* e *Monier*.

Em 1852, *François Colignet* (1814-1868), engenheiro químico e construtor francês, construiu para seu uso uma casa em Saint Denis, na qual a laje do tecto foi reforçada com vigas de ferro. Alguns especialistas atribuem a *Colignet* a iniciativa de envolver perfis de ferro com concreto, precisando assim a ideia de dar às armaduras o papel de resistência à tração nas regiões das estruturas sujeitas a esta tensão. Em 1855 *Colignet* obteve na Inglaterra a Patente No. 2659 para sua técnica de combinação de concreto e ferro e ainda obteve outra patente na França no ano seguinte. Em 1861 *F. Colignet* publicou seu livro onde apresentava os princípios básicos dessa técnica construtiva, embora não desenvolvesse qualquer análise matemática e não apresentasse fórmulas.

Em 1855, o americano *Thaddeus Hyatt* (1816-1901) projetou e construiu uma viga com seção quadrada feita de tijolos confinados por um tirante próximo ao fundo dos tijolos que passava através de furos feitos neles com essa finalidade. Depois disso *Hyatt* analisou a resistência de vigas de concreto armadas com perfis de ferro e elaborou tabelas para lajes com vãos até 12 metros com relações vão/espessura, que seriam aceleráveis hoje em dia. *Hyatt*, além de advogado, era essencialmente um inventor e em 1877 publicaria uma monografia contendo os resultados dos seus experimentos que seria de importância fundamental para o concreto armado.

Em 1875, o americano *William Evans Ward* (1821-1900), que tinha formação de engenheiro mecânico obtida através da vivência prática, usando sua inteligência e apoiando-se em experimentos realizados em 1871 e 1872, construiu em Port Chester, N. Y., EUA, uma casa inteiramente de concreto armado.

Em 1879, *François Hennebique* (1842-1921) já estava construindo, na França e na Bélgica, lajes em concreto com ferro e desenvolvendo os métodos construtivos que iria patentear treze anos depois. *Hennebique* inventou a seção T unido monoliticamente a laje com a viga de modo que a laje pudesse servir como mesa comprida. O método construtivo introduzido por *Hennebique* consistia em moldar ao mesmo tempo lajes, vigas e pilares, usando arranjos de armaduras parecidos com os atuais, dando unidade à estrutura. O impeto que seu método deu à nova arte de construir foi tão grande que *Hennebique* é considerado o criador da construção monolítica. Foi também o criador dos esboços, dando a eles a mesma função que lhes é atribuída atualmente. Seu método construtivo ficou conhecido como "Sistema *Hennebique*".

Depois de 1880, empresários da Alemanha e da Áustria estavam negociando com *Joseph Monier* os direitos de uso de suas patentes. Em 1884, esses direitos foram adquiridos pelas firmas *Freytag & Heidsieck*, de Neustadt an der Haardt, e *Karenstein & Jossaux*, de Offenbach am Main, para sua utilização na Alemanha. Em 1885, esses direitos também foram cedidos ao empresário e técnico em construções *Gustav Adolf Wagns* (1851-1917). No ano seguinte, em sociedade com *Rudolf Schuster*, ele fundaria em Berlim a firma *G. A. Wagns & Co.* para construções de concreto segundo o "Sistema *Monier*".

Embora esse sistema já estivesse sendo usado na França com sucesso comprovado, **Gustav Adolf Weyss** promoveu em 26 de fevereiro de 1856, em Berlim, uma série de ensaios de elementos de concreto, em escala natural, para demonstrar por meio de provas de carga as vantagens econômicas oferecidas pela inclusão de barras de aço no concreto. Foram ensaiados arcos, abóbodas e lajes de concreto, com e sem armadura. Os resultados desses ensaios foram divulgados por **Weyss** em 1867 na monografia *Das System Monier*, publicada em Berlim e Viena. Em 1893, depois de retirar-se da sociedade com **Rudolf Schuster**, se associa à firma **Freytag & Heidschuch** cuja razão social passava a ser **Weyss & Freytag A. G.**, como é até hoje.

Nessa época despertava o interesse por se estabelecerem métodos para calcular os elementos que compõem as estruturas de concreto armado.

Durante os ensaios realizados por **G. A. Weyss**, em 1886, o engenheiro e mestre construtor **Mathias Koernen** (1849-1924) estava presente como representante do governo prussiano. **Koernen** entendeu claramente a finalidade da armadura, isto é, resistir os esforços de tração enquanto o concreto resiste aqueles de compressão. Em novembro daquele ano **Koernen** publicaria um artigo relacionado com os ensaios de **Weyss** tratando sobre o cálculo da espessura e da armadura de lajes de concreto armado. Essa contribuição modesta parece ter sido a primeira afirmação formal sobre a análise da seção transversal de uma peça de concreto armado. Esse texto foi reproduzido por **Weyss** em 1887 em *Das System Monier*, primeira publicação significativa sobre o concreto, e seria usado por projetistas durante muitos anos.

Em 1894, **Edmond Coignet** e **Napoléon de Tedesco** apresentaram formalmente uma proposta inovadora para o cálculo das seções de concreto armado submetidas à flexão.

Em 1897 **Charles Fabry** (1852-1929) ministrava o primeiro curso sobre o concreto armado na *École Nationale des Ponts et Chaussées* em Paris.

De 1900 a 1910 foram publicados os resultados de diversas comissões de estudos na França, na Alemanha e na Suíça. Esse foi um período de revisão e consolidação das ideias vigentes na época. O concreto armado já era suficientemente conhecido para encorajar a elaboração de artigos e livros sobre o assunto. Vários autores e pesquisadores se destacaram na elaboração das bases para o cálculo do concreto armado como: **Paul Christophe** (1859), **Wilhelm Ritter** (1859), **Arnand Considère** (1902), **Emil Mörsch** (1902) e **Edmond Coignet** e **Napoléon de Tedesco** (1904).

Emil Mörsch (1872-1950), diretor técnico da firma **Weyss & Freytag A. G.**, desde 1901 e professor de Estática, Construção de Concreto e Pontes, no Instituto Politécnico de Stuttgart em 1902 a primeira edição do seu livro onde desenvolveu a teoria incluída por **Mathias Koernen** tornando-se a primeira teoria de dimensionamento dos elementos de concreto armado com bases científicas e fundamentada em numerosas experiências que foram iniciadas com patrocínio da firma **Weyss & Freytag A. G.** e continuadas juntamente com **Carl von Bach** e **Otto Graf** no Instituto Politécnico de Stuttgart. Os conceitos desenvolvidos por **Mörsch** constituíram durante décadas em quase todo o mundo os fundamentos da teoria do concreto armado, sendo válidos até hoje, pelo menos nos seus aspectos fundamentais.

Com o desenvolvimento da nova técnica de construção, tornou-se necessário regulamentar seu projeto e sua execução. Assim, surgiram as primeiras instituições ou normas, como Alemanha (1904), na França (1906), na Inglaterra (1907), na Suíça (1909) e nos EUA (1910). No Brasil, a primeira norma oficial de abrangência nacional a respeito das obras de concreto armado só surgiu em 1940, ensinando a fundação da Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT naquele ano.

1.2 - Armadura

O material usado na armadura é o aço, embora em certos casos possam ser usados outros materiais como o bambu ou materiais fibrosos (fibra de vidro, plástico ou nylon). Os aços destinados ao emprego em concreto armado devem satisfazer as exigências da *NBR-7480 Barras e fios destinados a armaduras para concreto armado*.

A armadura pode ser disposta no sentido longitudinal e no sentido transversal ao elemento. É formada por barras isoladas, em segmentos sem dobras ou com dobras tendo ou não ganchos nas extremidades. Em alguns casos a armadura pode ser constituída por barras agrupadas formando feixes e, em outros, por teias ou malhas soldadas compostas por barras dispostas em duas direções ortogonais soldadas nos pontos de cruzamento.

Considere-se uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga vertical agindo de cima para baixo, como mostra a Figura 1.1.

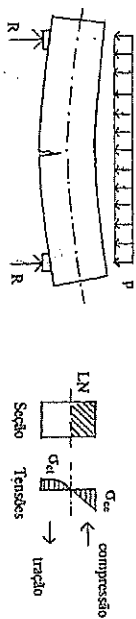


Figura 1.1 - Viga de concreto simples submetida à flexão

Tratando-se de uma viga de concreto simples, o colapso dar-se-á devido à tração ondulada da flexão, isto se deve ao fato de ser a resistência do concreto à tração muito menor que a resistência à compressão. Fica, assim, mal aproveitado o concreto da região comprimida. Para evitar que isto aconteça e permitir que a viga possa suportar uma carga bem maior, coloca-se na sua região tracionada uma armadura longitudinal. Na peça armada, o concreto dessa região fissura e a armadura deve suportar sozinha os esforços de tração que o concreto é incapaz de resistir, como mostra a Figura 1.2.

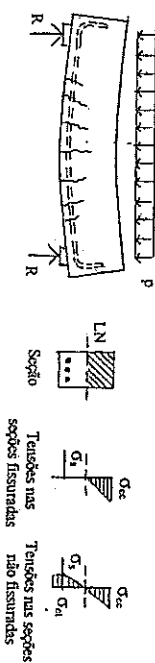


Figura 1.2 - Viga de concreto armado submetida à flexão

Considere-se agora uma viga de concreto sobre dois apoios, com uma extremidade em balanço e submetida a um carregamento idêntico ao da viga anterior, como mostra a Figura 1.3. No trecho AB as seções transversais estão submetidas a momentos fletores positivos e no trecho BC sujeitas a momentos fletores negativos. As seções entre A e B estão comprimidas na região superior à linha neutra e tracionadas na região inferior a essa linha. As seções entre B e C estão comprimidas na região inferior à linha neutra e tracionadas na região superior a essa linha.

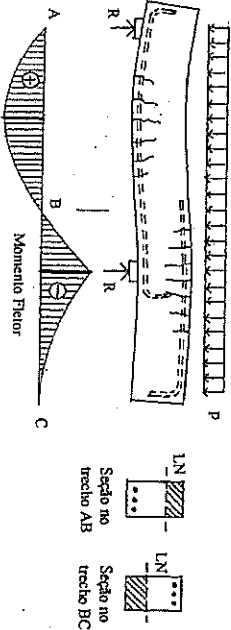


Figura 1.3 - Viga de concreto armado submetida à flexão

Entre os pontos A e B, esta viga deverá ter na parte inferior uma armadura para resistir os esforços de tração oriundos dos momentos positivos (armadura positiva) e, entre os pontos B e C, a viga deverá ter na parte superior uma armadura para resistir os esforços de tração oriundos dos momentos negativos (armadura negativa).

Seria lícito pensar em armar longitudinalmente toda a parte tracionada da seção. Entretanto, por razões que serão esclarecidas depois, nas peças feitas de concreto é suficiente para resistir os esforços de compressão, ficando por conta da armadura, colocada o mais distante possível da linha neutra, a função de resistir os esforços de tração. Este procedimento, contudo, não é válido para as vigas de grande altura, as quais exigem uma armadura suplementar para controlar a fissuração entre a linha neutra e a armadura principal.

Os exemplos apresentados servem para esclarecer o modo de disposição da armadura longitudinal dos elementos sujeitos à flexão.

Além dessas armaduras longitudinais, são dispostas armaduras transversais, com finalidade construtiva ou destinadas a resistir os esforços de tração na alma das peças oriundos do estado múltiplo de tensão a que o concreto aí está sujeito, em virtude da ação combinada das tensões normais e tangenciais. Armaduras desse tipo são utilizadas para resistir os esforços de tração na alma das peças sujeitas à força cortante ou à torção, além da flexão.

As armaduras das peças de concreto armado devem ser dispostas para absorver os esforços de tração da maneira mais eficiente possível. Para os casos principais, as disposições mais eficientes para essas armaduras foram determinadas através de ensaios. Desse modo são conseguidos arranjos de armadura que resistam os mecanismos de ruptura das peças de concreto armado. Para os casos particulares, em que não se dispõe de conhecimento suficiente a respeito do mecanismo de ruptura, as disposições de armadura são determinadas a partir de teorias elásticas, considerando as peças de concreto armado como se fossem feitas de material homogêneo.

1.3 - Fissuração

A resistência do concreto à tração é insuficiente para resistir as tensões provocadas pelas cargas porque é baixa e porque é praticamente consumida por inevitáveis tensões internas no concreto.

As diferenças de temperatura provocadas por influências atmosféricas e pelo calor gerado durante as reações da água com o cimento, a retração (parcialmente inibida pela armadura) e diferenças na velocidade de endurecimento, são fatores que contribuem para o aparecimento de tensões internas no concreto, que provocam microfissuras. O concreto acha-se microfissurado internamente, mesmo antes de receber solicitação exterior, e a resistência à tração é, em parte, consumida pelas tensões internas. Durante a utilização da estrutura, as cargas produzem tensão de tração que contribuem para abrir novas fissuras e aumentar as já existentes. Por essa razão, as peças de concreto simples, quando lidas ou tracionadas, possuem capacidade de carga bastante baixa e a ruptura é brusca, característica de material frágil.

Quando se coloca uma armadura na região tracionada de uma peça de concreto armado, com a finalidade de aumentar sua resistência, as tensões de tração provocadas pelo carregamento assumem valores elevados, o suficiente para fissurar o concreto nessa região, cabendo à armadura a função de resistir sozinho os esforços de tração. Por essa razão, no cálculo das peças de concreto armado considera-se a fissurada a região tracionada, desprezando-se a resistência do concreto à tração. Dimensiona-se a armadura para resistir sozinho os esforços de tração, contando-se com o concreto apenas da parte comprimida.

As fissuras que são admitidas no cálculo realmente ocorrem sob as condições de serviço, embora sejam invisíveis a olho nu. Além disso, a distribuição citada da armadura e do uso de barras com conformação superficial especial, que permita boa aderência ao concreto, pode-se controlar a distribuição das fissuras, mantendo-as pouco abertas e mais próximas umas das outras.

A experiência tem demonstrado que podem ser consideradas indesejáveis para a durabilidade das estruturas de concreto armado, as fissuras que apresentarem abertura ao nível da armadura não superior a 0,2 mm, nas partes das estruturas expostas ao ar em condições normais, e não superior a 0,4 mm nas partes das estruturas que nunca entrem em contato com a umidade.

1.4 - Aderência

Para que se tenha o concreto armado, não basta que o concreto e o aço sejam empregados em conjunto. É preciso que exista solidariedade entre os dois materiais. O que caracteriza a existência do concreto armado é essa solidariedade entre o concreto e a armadura. Para que esses dois componentes do concreto armado atuem simultaneamente, não deve existir escorregamento relativo entre eles. Isso é possível desde que a deformação específica ϵ_s da armadura seja igual à deformação específica ϵ_c do concreto que a envolve.

Quem garante a solidariedade entre o concreto e a armadura é a aderência. Se a aderência for verdadeira, há um deslizamento que age na interface dos dois materiais, haverá escorregamento relativo entre eles, deixando de existir o concreto armado.

1.4.1 - Concreto armado

Para mostrar a importância da aderência, considerem-se as seguintes situações:

a) Uma viga de concreto é moldada de modo que, após o seu endurecimento, resulte um orifício longitudinal pelo qual se introduz uma barra de aço, como mostra a Figura 1.4. A barra ficará sola no interior da viga por não ter aderência com o concreto.

Sob a ação de uma carga qualquer, a viga deformará e a barra acompanhará a flexão da viga, sem ser solicitada longitudinalmente, por estar sola no interior do concreto. Quem resistirá os esforços de compressão e tração é apenas o concreto. A barra não acompanhará o alongamento do concreto que a envolve e não participará da resistência da região tracionada da viga.

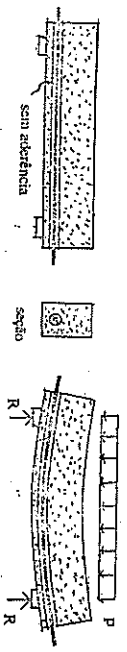


Figura 1.4 - Associação de concreto com aço sem aderência

b) Invertendo a ordem das operações a situação se modifica. Agora a barra é colocada no molde muito pouco tempo do fundido e é envolvida pelo concreto quando o molde é enfiado. Após o endurecimento do concreto cria-se a aderência entre este e a barra. Sob a influência de uma carga qualquer, ocorre a Figura 1.5, a viga deformará e o alongamento do concreto na região tracionada será transmitido por aderência à barra (agora chamada armadura) que acompanhará o concreto mobilizando sua resistência à tração e colaborando com o concreto na resistência da região tracionada da viga. Finais os dois materiais estarão agindo solidariamente.

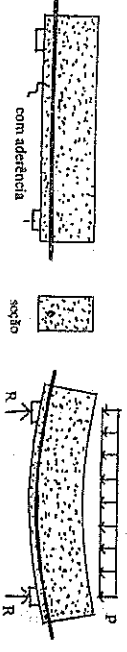


Figura 1.5 - Associação de concreto com aço com aderência

Os esforços de compressão serão resistidos pelo concreto. Enquanto não houver fissuras na região tracionada, os dois materiais estarão resistindo os esforços de tração. Nas seções em que abriram fissuras no concreto, somente a barra estará resistindo tração. A força de tração que lhe cabe nessas seções é transferida por aderência para o concreto ao longo do comprimento da barra no trecho em que o concreto não está fissurado. Este é o concreto armado.

Retorne-se a primeira situação, em que não existe aderência entre a barra e o concreto, mas agora estando a barra com suas extremidades presas nas faces da viga através de algum dispositivo. Sob a influência de uma carga qualquer, como mostra a Figura 1.5, a viga deformará e o concreto na vizinhança da barra sofrerá um alongamento Δl . A barra, que tem suas extremidades presas, sofrerá o mesmo alongamento Δl que o concreto e resistirá junto com ele os esforços de tração.

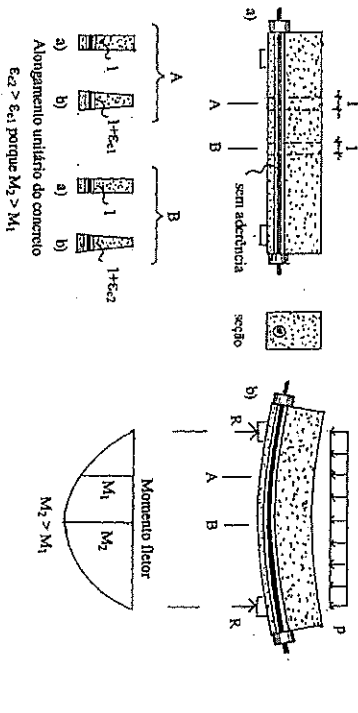


Figura 1.6 - Associação de concreto com aço sem aderência

Este caso, porém, difere do segundo no seguinte aspecto. Embora os alongamentos totais da barra e do concreto sejam iguais, os alongamentos unitários de ambos são diferentes. Enquanto o alongamento unitário da barra, de comprimento inicial l , é constante e vale $\epsilon_s = \Delta l/l$, o alongamento unitário do concreto ϵ_c é variável com o momento fletor em cada seção. Por causa disso, há deslizamento relativo entre os dois materiais.

Além disso, a tensão na barra diminui com o tempo até anular-se. Para diminuir os efeitos dessa perda de tensão e manter a eficiência da barra, é necessário aplicar uma força de tração inicial na barra, assim comprimindo o concreto, antes que a carga comece a atuar. Agindo desta forma a barra já estará inicialmente tracionada e o concreto inicialmente comprimido. Com o tempo, a tensão na barra diminuirá mas não chegará a anular-se e a barra funcionará como armada. Este procedimento, porém, contraria o princípio que rege o concreto armado: os dois materiais, concreto e aço, só estarão sob tensão na presença da carga.

Portanto, para que exista solidariedade entre os dois materiais, é necessário que exista completa aderência entre o concreto e a armadura. Somente assim as deformações dos dois materiais serão iguais ao longo das superfícies em contato, na quase totalidade da extensão da peça. A aderência entre ambos dá integridade à esta unidade e a proteção que o concreto oferece contra a oxidação da armadura lhe assegura durabilidade.

Assim, pode-se definir concreto armado como a associação entre concreto e um material resistente à tração, envolvido pelo primeiro, de modo que ambos resistam solidariamente os esforços a que forem submetidos.

1.6 - Vantagens do concreto armado

De uma maneira geral, podem ser apontadas como vantagens do concreto armado na construção as seguintes:

- Facilidade de adaptação às formas construtivas
- Monolitismo
- Rapidez de construção
- Economia de construção
- Economia de manutenção
- Bom resistência aos esforços dinâmicos
- Segurança contra o fogo

1.7 - Inconvenientes do concreto armado

- Peso próprio elevado
- Peça fissurada

1.8 - Normas

Com a disseminação do emprego do concreto armado na construção surgiram os primeiros regulamentos para orientar o projeto e a execução desse tipo de obra. Normas regulamentando o projeto e a execução de estruturas de concreto armado existem em todos os países. Há países que possuem normas mais completas e detalhadas e outros cujas normas são mais sucintas. Em outros, há normas diferentes adotadas por diferentes órgãos ou associações técnicas.

No Brasil, as normas empregadas em todo o país são estudadas e aprovadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT - e aquelas que se referem às estruturas de concreto armado são as seguintes:

- NR-6118 (2003): Projeto de estruturas de concreto - Procedimento
- NR-6120 (1980): Cargas para o cálculo de estruturas de edificações - Procedimento
- NR-6123 (1988): Forças devidas ao vento em edificações - Procedimento
- NR-7187 (2003): Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido - Procedimento
- NR-7188 (1994): Carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestres
- NR-7189 (1985): Cargas móveis para projeto estrutural de obras ferroviárias
- NR-7191 (1982): Execução de desenhos para obras de concreto simples ou armado
- NR-7480 (1995): Barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado - Especificação
- NR-7481 (1990): Tira de aço soldada - Armadura para concreto - Especificação
- NR-7480 (1996): Barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado - Especificação
- NR-8681 (2003): Ações e segurança nas estruturas - Procedimento
- NR-8953 (1992): Concreto para fins estruturais - Classificação por grupos de resistência - Classificação
- NR-9062 (2001): Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado - Procedimento
- NR-14859-1 (2002): Laje pré-fabricada - Requisitos - Parte 1: Lajes unidimensionais
- NR-14859-2 (2002): Laje pré-fabricada - Requisitos - Parte 2: Lajes bidimensionais

2 - AÇÕES E SEGURANÇA NAS ESTRUTURAS

2.1 - Introdução

Nesta introdução pretende-se apresentar os personagens principais dos temas que serão abordados neste trabalho.

Denomina-se ação, F , toda influência exercida sobre um corpo capaz de produzir um estado de tensão ou de modificar o estado já existente. Considerando-se as estruturas das obras de Engenharia, as ações são as forças atuantes e as deformações impostas.

Estrutura é um corpo ou conjunto de corpos adequado a resistir as ações. Como exemplos, podem ser mencionadas algumas:

- a estrutura de concreto de um edifício;
- a estrutura de aço de um galpão industrial;
- uma ponte de concreto ou de aço;
- um reservatório de concreto;
- uma passarela de madeira.

Segurança de uma estrutura é a capacidade que ela apresenta de suportar as diversas ações que vierem a solicitá-la durante sua vida útil sem que ela perca a sua função.

Denomina-se solicitação, S , todo esforço ou conjunto de esforços que, devido às ações, se exerça sobre uma ou mais seções de um elemento da estrutura. Entre as solicitações estão: força normal, momento fletor, força cortante e momento de torção.

Dal decorre que as ações são as causas e as solicitações são os seus efeitos.

Reunindo os conceitos acima apresentados pode-se afirmar que toda estrutura deve ser concebida e projetada para resistir, com segurança apropriada, a todas as ações previstas durante os períodos de construção e utilização e apresentar uma durabilidade satisfatória durante a vida prevista para ela.

A finalidade do cálculo é, pois, garantir uma segurança apropriada contra a ruína da estrutura e de seus elementos constituintes e assegurar a utilização normal da obra durante toda a vida útil.

Quando uma estrutura ou uma de suas partes torna-se imprópria para o uso normal, de modo efetivo ou convencional, porque deixa de cumprir suas funções ou não satisfaz mais as condições para as quais ela foi concebida, diz-se que ela atingiu um estado particular chamado estado limite.

Quando os estados limites correspondem a situações que caracterizam o esgotamento da capacidade de suporte da estrutura, causando a paralisação do seu funcionamento, são chamados estados limites últimos ou estados de ruína.

Os estados de ruína são aqueles em que a estrutura deixa de ser útil para os fins a que foi feita, ou por ter-se rompido, ou por ter-se tornado hipostática, ou por ter flambado, ou por ter sofrido deformações exageradas, ou por ter faturado além do limite prescrito.

Quando os estados limites correspondem a situações que impedem a utilização normal da estrutura ou comprometem a sua durabilidade, sem haver ruína, são chamados estados limites de utilização ou estados de serviço.

Os estados de serviço são aqueles em que, nas condições de uso, a estrutura deixa de ser útil para os fins a que foi feita, ou por ter faturado, ou por ter faturado além do limite permitido, ou por ter sofrido deformações exageradas.

A segurança das estruturas está relacionada com os estados limites últimos, ou seja, com a ruína. Uma vez introduzido, neste início, o conceito de segurança meramente qualitativo, resta estabelecer métodos de cálculo que conduzam a estruturas seguras.

2.2 - O conceito de segurança

Os parâmetros envolvidos no projeto das estruturas são afetados por uma margem de incerteza. A resistência dos materiais e as ações sobre as estruturas são variáveis aleatórias cujos valores estão sempre associados a uma determinada probabilidade de serem ou não superados no seu sentido mais desfavorável durante a vida útil da estrutura.

Verifica-se que as características dos materiais, principalmente a sua resistência, sofrem variações entre amostras. Em qualquer que seja o processo de fabricação de um material, não é muito frequente a obtenção de valores idênticos para a resistência em diferentes corpos-de-prova da mesma amostra. A resistência dos materiais é, portanto, uma variável aleatória.

Enquanto se um grande número de corpos-de-prova de um certo material, os valores das tensões de ruptura distribuem-se em torno da média com uma certa distribuição de frequência. A sua distribuição de probabilidade é representada pela distribuição normal (curva de Gauss) mostrada na Figura 2.2. A dispersão não pode ser evitada, mas será tanto menor quanto mais rigoroso for o controle de fabricação do material.

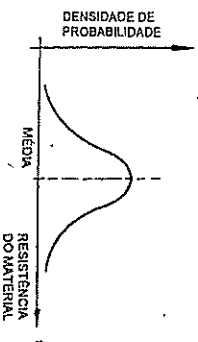


Figura 2.1 - Distribuição de probabilidade da resistência dos materiais

O mesmo ocorre com as ações e solicitações que agem sobre as estruturas durante sua vida útil. A intensidade das ações e das solicitações varia em torno de um valor médio de forma aleatória, conforme distribuições de probabilidade que não são simétricas como a distribuição mostrada na Figura 2.2.

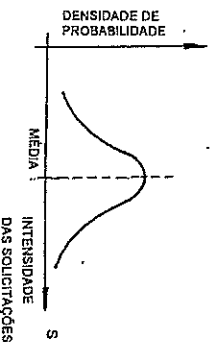


Figura 2.2 - Distribuição de probabilidade da intensidade das solicitações

Verifica-se ainda que a ruína de uma estrutura está associada a vários outros fatores. Influências exercidas sobre ela por agentes externos, como vento, variação de temperatura, etc, estão sujeitas a acasos, bem como seus valores máximos desconhecidos aparecem por mera casualidade em grandes intervalos de tempo. Defeitos casuais dos materiais ou ocorridos durante a execução da estrutura podem levá-la à ruína prematura.

Por outro lado, outros fatores fora de controle também podem afetar a segurança, como imprecisões inevitáveis ou cometidas por engano nas hipóteses de carga, aproximações introduzidas nas hipóteses de cálculo, aproximações ou erros involuntários cometidos nos cálculos, desvio do comportamento real do sistema estrutural em comparação com aquele suposto no projeto, erros inevitáveis cometidos durante a execução da estrutura, alteração das características do concreto e do aço, o rigor no controle de produção desses materiais, a qualidade das técnicas empregadas na execução da estrutura, o desgaste eventual e o envelhecimento precoce da estrutura ao longo do tempo, etc..

Como as variáveis que afetam a segurança são de caráter aleatório, parece razoável orientar os métodos de verificação da segurança das estruturas segundo critérios probabilísticos.

A solução do problema consiste em manter a probabilidade de ruína abaixo de um certo limite, como por exemplo, 10^{-4} , 10^{-5} , etc., sobre o qual incidem ainda outros fatores, como custos de construção e conservação da estrutura, custo de sua reconstrução, valor do prêmio de seguro para cobrir os danos e prejuízos em caso de ruína ou da perda das condições de utilização da estrutura, indenizações por danos corporais, consequências de ordem moral e psicológica que a ruína possa trazer, etc..

Como o modo clássico e determinístico de introdução de coeficientes de segurança, sob uma forma global e arbitrária, não considera, senão de uma maneira muito imprecisa, a incidência de todos esses fatores na segurança, modernamente o conceito de segurança das estruturas tem-se baseado na Teoria das Probabilidades.

Conhecida a distribuição de probabilidade da solicitação, S , numa dada seção, dela decorre a distribuição da probabilidade da tensão, $\sigma(S)$, provocada pelas solicitações num dado ponto da estrutura. Esta distribuição e a distribuição de probabilidade da resistência do material, f , podem ser representadas num mesmo sistema de eixos de referência, como mostra a Figura 2.3.

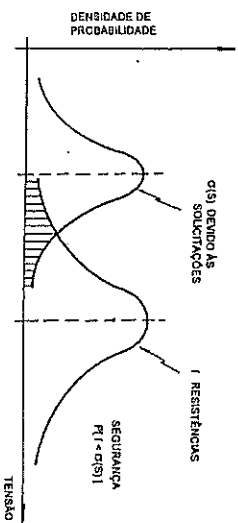


Figura 2.3 - Densidades de probabilidade da resistência e da tensão no material

Como essas curvas são assimétricas ao eixo das abscissas, terdo um domínio comum, nessa região comum corresponde ao risco de ruína porque está associada à probabilidade de que a tensão provocada pelas ações ou solicitações, num determinado ponto da estrutura, seja maior que a resistência do material nesse ponto. Por essa razão, quanto menor for a área desse domínio comum às duas distribuições, menor será a probabilidade de ruína da estrutura e, portanto, maior será a sua segurança.

Este é o conceito atual de segurança das estruturas.

Não se pode, portanto, afirmar que uma determinada estrutura seja absolutamente segura porque sempre haverá um domínio comum às duas distribuições. Pode-se dizer que uma estrutura apresenta uma probabilidade muito pequena de ruína.

2.3 - O método dos estados limites

Para que um cálculo probabilístico possa ser desenvolvido com o rigor necessário, torna-se indispensável conhecer as distribuições de probabilidade correspondentes às cargas, sobrecargas e outras ações sobre as estruturas e à resistência dos materiais de que são constituídas e de todas as outras variáveis envolvidas na questão.

No que se refere à resistência dos materiais, os dados estatísticos de que se dispõe são estatísticos. Contudo, a respeito das cargas em geral e de deformações impostas às estruturas, as informações disponíveis ate o estágio atual do conhecimento são insuficientes para um estudo dessa natureza. Além disso, vários outros fatores, alguns já mencionados anteriormente, exercem influência sobre a segurança e a seu respeito não se dispõe ainda de dados estatísticos suficientes que permitam o desenvolvimento de uma teoria probabilística. E mais, se lhes fosse também conferido um tratamento probabilístico, o cálculo estrutural se tornaria extremamente complexo. Por isso, parece difícil conseguir uma aplicação rigorosa da Teoria das Probabilidades que leve a uma forma prática e confiável de verificação da segurança das estruturas.

Essa dificuldade levou o meio técnico a adotar um método semi-probabilístico de cálculo aceito mundialmente. Esse método decorre de uma combinação do método determinístico de cálculo na ruptura com o método probabilístico e denomina-se *método dos estados limites*.

Estados limites são situações tais que ao serem ultrapassadas por uma estrutura ou por uma de suas partes, colocam essa estrutura fora de utilização normal de forma efetiva ou convencional.

Os estados limites são classificados em duas categorias:

- estados limites últimos (ruína): aqueles que correspondem ao valor máximo da capacidade portante de uma estrutura;
- estados limites de utilização (serviço): aqueles que correspondem aos diferentes critérios de desempenho para assegurar utilização normal e durabilidade de uma estrutura.

A NBR-6118 considera nas estruturas de concreto os seguintes estados limites:

- estados limites últimos:
 - esgotamento da capacidade resistente da estrutura no seu todo ou em parte;
 - inabitabilidade por efeito de 2ª ordem;
 - perda da estabilidade como corpo rígido;
 - deterioração por fadiga.
- estados limites de utilização:
 - estado de formação de fissuras: estado em que é grande a probabilidade de ocorrência de fissuras normais à armadura longitudinal;
 - estado de fissuração inaceitável: estado em que é grande a probabilidade de que as fissuras que se formam se apresentem com abertura prejudicial ao uso ou à durabilidade da estrutura;
 - estado de deformação excessiva: estado em que é grande a probabilidade de que as deformações possam atingir níveis que sejam prejudiciais à estrutura ou a outras partes da construção;
 - estado de vibrações excessivas: estado em que é grande a probabilidade de que as vibrações produzidas por ações dinâmicas atinjam níveis que sejam prejudiciais à utilização normal da construção.

Como foi visto, a probabilidade de ruína de uma estrutura está associada à área comum às curvas que representam as distribuições de probabilidade do material e das tensões provocadas pelas ações ou solicitações apresentada na Figura 2.3. Quanto menor esta área comum, menor é o risco de que a estrutura atinja o colapso. Para diminuir a área comum às duas curvas da Figura 2.3, isto é, aumentar a segurança, dispõe-se de dois meios: tornar as curvas mais agudas ou aumentar a distância entre elas.

a) Tornar as curvas mais agudas, como mostra a Figura 2.4.

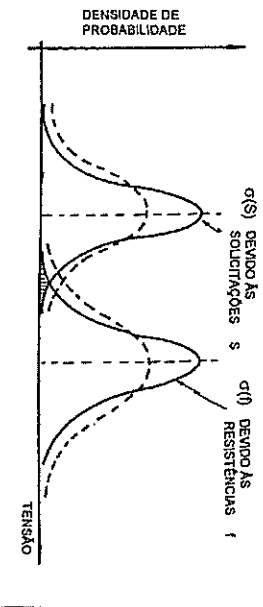


Figura 2.4 - Distribuições de probabilidade da resistência e da tensão no material

Para os materiais, corresponde a obter-se qualidade tão constante quanto o possível. É preferível dispor de um material cuja resistência seja inferior, em lugar de um material, em média, mais resistente, mas que apresenta uma grande variabilidade da resistência. Para as cargas e outras ações, corresponde a ter-se uma amplitude pequena de variação da sua intensidade na estrutura, o que é difícil ocorrer no caso das estruturas usuais.

b) Aumentar a distância entre as curvas, como mostra a Figura 2.5.

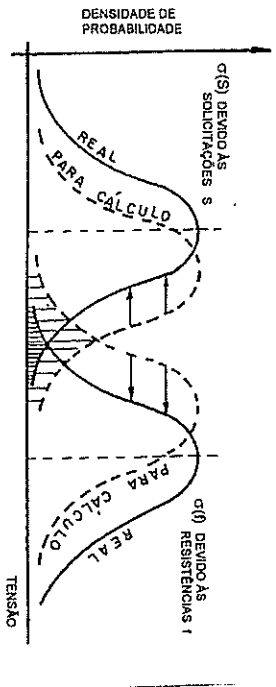


Figura 2.5 - Densidades de probabilidade da resistência e da tensão no material

Pode-se conseguir isso, por um lado, afetando a resistência provável dos materiais de um coeficiente de minoração γ_m que leve em conta, principalmente, o fato de que sua qualidade no corpo-de-prova é diferente daquela na estrutura. Esse coeficiente de minoração pode ser escolhido para cada material e pode assumir valores diferentes para materiais diferentes conforme seja maior ou menor a variabilidade da sua resistência.

Por outro lado, pode-se introduzir na intensidade das cargas, sobrecargas e outras ações um coeficiente de majoração γ_f que leve em conta, principalmente, um acréscimo possível dos seus valores, imprecisões de cálculo, simplificações introduzidas nas hipóteses de cálculo e todas influências que possam fazer com que a solicitação real ultrapasse a solicitação prevista no cálculo. Pode-se ainda levar em conta esses coeficientes a importância das consequências da ruína da estrutura, aumentando o seu valor se as consequências forem muito graves e importantes ou diminuindo o seu valor em caso contrário.

O método dos estados limites, em princípio, consiste em:

a) tomar valores característicos para as resistências dos materiais e valores característicos para as cargas, sobrecargas e outras ações, determinando, fixando-se a priori a probabilidade de seus valores efetivos ultrapassarem, no sentido desfavorável, aqueles escolhidos como característicos;

b) tomar como base para cálculo, valores de cálculo para as resistências dos materiais, iguais aos seus valores característicos divididos por um coeficiente γ_m , e valores de cálculo para as cargas, sobrecargas e outras ações, iguais aos seus valores característicos multiplicados por um coeficiente γ_f .

Desta forma, o dimensionamento é feito em um nível intermediário à ruína e à utilização, reduzindo-se as resistências e majorando-se as ações ou as solicitações, como mostra a Figura 2.6. O coeficiente de segurança global fica representado pelo produto γ_f/γ_m .

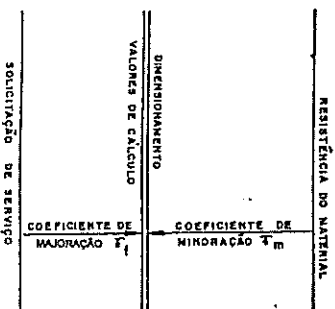


Figura 2.6 - Método dos estados limites

2.4 - Ações a considerar

As ações a serem consideradas na determinação das solicitações nos estados limites podem ser classificadas segundo sua variação no tempo ou no espaço, segundo a resposta da estrutura ou ainda conforme a sua natureza.

Segundo sua variação no tempo, as ações podem ser classificadas em:

- ações permanentes: aquelas de longa duração e para as quais as variações de intensidade são raras ou desprezíveis em relação ao seu valor médio;
- ações variáveis: aquelas para as quais as variações de intensidade são frequentes e não desprezíveis em relação ao seu valor médio;
- ações excepcionais: aquelas que têm duração extremamente curta e probabilidade muito pequena de que atuem com intensidade significativa sobre a estrutura durante sua vida útil.

Segundo sua variação no espaço, as ações podem ser:

- a) *ações fixas*: aquelas cuja distribuição sobre a estrutura é definida sem ambigüidade;
- b) *ações livres*: aquelas que podem ter uma distribuição arbitrária sobre a estrutura dentro de certos limites.

Segundo a resposta da estrutura, as ações podem ser:

- a) *ações estáticas*: aquelas que não imprimem aceleração significativa sobre a estrutura ou sobre seus elementos;
- b) *ações dinâmicas*: aquelas que provocam aceleração significativa sobre a estrutura ou sobre suas partes.

Conforme sua natureza, as ações podem ser:

- a) *ações diretas*: torças - compreendendo as cargas permanentes, cargas variáveis, cargas acidentais e reações de apoio;
- b) *ações indiretas*: deformações impostas - compreendendo efeito térmico, retração, flutuação, protensão, deslocamento de apoio, etc..

Um termo encontrado com frequência na literatura e na prática é carga acidental, que decorre de um conservadorismo mantido por tradição durante anos no projeto estrutural. O conceito de ação acidental, ou carga acidental, sugere um relacionamento com eventos desastrosos, que podem ocorrer por causas acidentais, compreendendo as torças resultantes de choques, explosões, abalos sísmicos, etc.. Porém, não é com esse sentido que o termo carga acidental foi, e ainda é, empregado em algumas Normas Brasileiras e que criou raízes no meio técnico também com o nome de *sobrecarga*. Nesse contexto, os termos *carga acidental* ou *sobrecarga* são empregados com o significado de carga variável ou ação variável como na classificação apresentada anteriormente.

Segundo a NBR-6118, no cálculo dos esforços solicitantes deverá ser considerada a influência das ações permanentes e variáveis e de todas as outras ações que possam produzir esforços importantes na estrutura. Essas ações deverão ser consideradas de acordo com as normas e as condições peculiares de cada obra incluindo as seguintes:

- a) *ações permanentes*: peso próprio da estrutura, pesos de todos os elementos construídos e instalações permanentes, empuxos permanentes de terra, água ou outros materiais granulados quando forem considerados não removíveis, retração e deformação lenta do concreto, deslocamentos de apoio e imperfeições geométricas;

- b) *ações variáveis*: peso de pessoas, móveis, objetos, equipamentos, materiais diversos, veículos, impacto vertical, impacto lateral, força de frenagem ou de aceleração, vento, empuxo de água quando seu nível puder variar, variações de temperatura, choques, vibrações e fadiga;

- c) *ações excepcionais*: aquelas definidas em cada caso particular por normas específicas.

2.5 - Carregamentos a considerar

Um carregamento é definido pela composição das ações que têm probabilidade não desprezível de atuar simultaneamente sobre a estrutura durante um período preestabelecido.

Durante o período de vida de uma construção podem ocorrer carregamentos dos seguintes tipos: carregamento normal, carregamento especial e carregamento excepcional. Além desses, em casos particulares também pode ser necessária a consideração do carregamento de construção. De acordo com sua duração, os carregamentos podem ser de longa duração ou transitórios.

O carregamento normal decorre do uso previsto para a construção e tem duração igual à vida útil da construção. Deve ser considerado nas verificações feitas tanto nos estados limites últimos quanto nos estados limites de utilização.

O carregamento especial decorre da atuação de ações variáveis de natureza ou intensidade especiais, cujos efeitos superam em intensidade os efeitos produzidos pelas ações consideradas no carregamento normal. É transitório e tem duração muito pequena em relação à vida útil da construção. Em geral, são considerados apenas na verificação da segurança em relação aos estados limites últimos.

O carregamento excepcional decorre da atuação de ações excepcionais que podem provocar efeitos catastróficos. Deve ser considerado no projeto da estrutura de determinados tipos de construção para os quais a ocorrência de ações excepcionais não possa ser desprezada. É transitório e tem duração extremamente curta. Por isso é considerado apenas na verificação da segurança em relação aos estados limites últimos.

O carregamento de construção é considerado apenas nas estruturas em que haja risco de ocorrência de estados limites já durante a fase de construção. É transitório e sua duração deve ser definida em cada caso particular. Deve ser considerado na verificação a todos os estados limites que são de se temer durante a fase de construção.

2.6 - Valores característicos

A concepção semi-probabilística adotada pela NBR-6118, consiste em limitar, em primeira aproximação, a análise estatística ao estudo da variabilidade da resistência dos materiais e da intensidade das cargas, sobrecargas e outras ações. Para esses parâmetros a variabilidade dos seus valores é levada em conta através de valores característicos.

Adota-se a análise estatística para as variáveis às quais tal análise é viável (sempre para as resistências do concreto e do aço e às vezes para as cargas e outras ações) e determinam-se os valores característicos dessas variáveis. Quando a análise estatística não é possível, o valor característico do variável é um valor representativo fixado a priori.

Entende-se como valor característico de uma variável, um valor associado a uma determinada probabilidade de que ele seja ultrapassado no sentido mais desfavorável.

Consideram-se valores característicos para cargas, sobrecargas e outras ações (ações características) e valores característicos para as resistências dos materiais (resistências características). Dos valores característicos das ações decorrem os valores característicos das solicitações.

2.6.1 - Valores característicos das ações

Para as ações que são consideradas aleatórias e quando se dispuser de dados estatísticos relativos à variabilidade de sua intensidade, o valor característico, F_k , será dado por:

$$F_k = F_m (1 \pm k\delta)$$

onde:

F_m = valor médio da F

k = fator dado pela Teoria das Probabilidades que depende da probabilidade ($r\%$) estabelecida a priori de que F_k seja ultrapassado no sentido desfavorável

δ = coeficiente de variação da distribuição

Sendo o desvio padrão $s = \delta \cdot F_m$, o valor característico F_k pode ser expresso por:

$$F_k = F_m \pm k \cdot s$$

Define-se o valor característico das ações como aquele que apresenta uma probabilidade $r\%$ de ser ultrapassado no sentido desfavorável.

Quando se tratar de uma ação cujo acréscimo de intensidade seja desfavorável, seu valor característico é o valor característico superior:

$$F_{k,sup} = F_m + k \cdot s$$

como mostra a Figura 2.7-a.

Quando se trata de uma ação cuja redução de intensidade seja desfavorável, seu valor característico é o valor característico inferior:

$$F_{k,inf} = F_m - k \cdot s$$

como mostra a Figura 2.7-b.

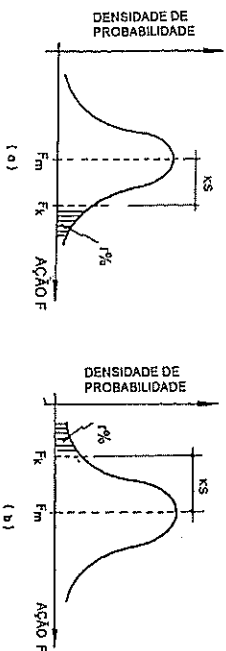


Figura 2.7 - Valor característico das ações

Os valores característicos das ações permanentes, F_{pk} , são determinados através do volume teórico dos materiais e das suas massas específicas nas condições de emprego mais desfavoráveis.

Para as ações permanentes que tenham baixa variabilidade, diferindo muito pouco entre si os valores característicos superior e inferior, aditam-se como característicos os valores médios das respectivas distribuições de probabilidade. Esses valores são indicados pela NBR-6118 e por Normas Brasileiras específicas como a NBR-6120.

Os valores característicos das ações variáveis, F_{vk} , estabelecidos por consenso e indicados pela NBR-6118 e por Normas Brasileiras específicas como a NBR-6120, correspondem a valores que têm de 25% a 35% de probabilidade de serem ultrapassados no sentido desfavorável durante um período de 50 anos. Isto significa que o valor característico F_{vk} é um valor com período médio de retorno de 200 a 140 anos, respectivamente.

As ações variáveis seguem outras distribuições de probabilidade que se assemelham ou não à distribuição normal (como por exemplo, distribuições de extremos). Para certas ações variáveis não é possível conhecer os valores característicos conforme a definição apresentada anteriormente. Mesmo para aquelas ações que, em princípio, possam ter sua variabilidade representada por uma distribuição de probabilidade, em geral, não há dados experimentais suficientes que permitam a determinação de valores característicos de acordo com a definição dada. Nesses casos recorre-se a valores característicos nominais que são escolhidos convenientemente.

Em geral, os valores característicos das ações variáveis a serem considerados são aqueles dados por normas específicas como a NBR-6120. Pode-se considerar que os valores nominais dados pelas normas existentes sejam os valores característicos superiores utilizáveis quando a influência das ações variáveis seja desfavorável para a seção analisada.

As ações variáveis cuja presença possa produzir efeitos favoráveis sobre a seção analisada, são consideradas como não atuantes sobre a estrutura.

2.6.2 - Valores característicos das solicitações

Os valores característicos das solicitações, S_k , são determinados com os valores característicos das ações:

$$S_k = \text{efeito de } F_k$$

2.6.3 - Valores característicos das resistências

O valor característico, f_k , da resistência de um material é aquele que, numa distribuição de tensões de ruptura de corpos-de-prova, corresponde a uma determinada probabilidade de ser ultrapassado no sentido desfavorável.

A resistência característica, f_k , é definida por:

$$f_k = f_m (1 \pm k \cdot s)$$

onde:

- f_m = resistência média
- k = fator dado pela Teoria das Probabilidades que depende da probabilidade (%) estabelecida a priori de que f_k seja ultrapassado no sentido desfavorável
- s = coeficiente de variação da distribuição

Sendo o desvio padrão $s = \delta / f_m$, o valor característico f_k pode ser expresso por:

$$f_k = f_m \pm k \cdot s$$

As resistências dos materiais seguem a distribuição normal de probabilidade.

O valor característico inferior, $f_{k,inf}$, da resistência de um material corresponde ao quantil $r = 5\%$ sendo, por isso, $k = 1,645$. Então, como mostra a Figura 2.8:

$$f_{k,inf} = f_m - 1,645 \cdot s$$

O valor característico superior, $f_{k,sup}$, da resistência de um material corresponde ao quantil $r = 95\%$ sendo, por isso, $k = 1,645$. Então, como mostra a Figura 2.8:

$$f_{k,sup} = f_m + 1,645 \cdot s$$

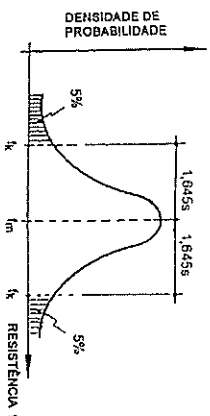


Figura 2.8 - Valor característico da resistência de um material

Usualmente é de interesse a resistência característica inferior, $f_{k,inf}$, cujo valor é menor que a resistência média f_m , embora por vezes haja interesse na resistência característica superior $f_{k,sup}$, cujo valor é maior que f_m . Quando não se fizer menção em contrário, é a resistência característica inferior aquela de interesse, podendo-se assim omitir o índice correspondente.

Do que foi visto, define-se resistência característica (inferior) de um material como a tensão correspondente à probabilidade de 5% de não ser alcançada numa distribuição normal de tensões de ruptura dos seus corpos-de-prova.

a) Para o aço

A resistência característica do aço corresponde à tensão mínima de escoamento, real ou convencional, de acordo com a NBR-7480.

A resistência característica (inferior) é entendida como:

$$f_{yk} = f_{ym} - 1,645 \cdot s \quad \text{na tração}$$
$$f_{yk} = f_{ym} - 1,645 \cdot s \quad \text{na compressão}$$

Na falta de resultados experimentais, deve-se supor $f_{yk} = f_{yk}$ e iguais ao valor mínimo para f_{yk} fixado pela NBR-7480 para cada categoria de aço.

b) Para o concreto

A resistência característica (inferior) é entendida como:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,645 \cdot s \quad \text{na compressão}$$
$$f_{ctk} = f_{ctm} - 1,645 \cdot s \quad \text{na tração}$$

Definido assim a resistência característica para a compressão, e do mesmo modo para a tração, pretende-se que ela seja entendida como sendo a resistência real. Corresponde ao concreto de uma região homogênea da estrutura e seu valor tenha uma probabilidade de 95% de ser igualado ou superado ao ser ensaiado um corpo-de-prova tomado ao acaso daquela região da estrutura. Essa resistência característica real é impossível de ser conhecida na prática porque, para determiná-la seria necessário conhecer a resistência de inúmeros pontos no entorno da região considerada. Hoje já se sabe que a resistência do concreto na estrutura, determinada em testemunhos, é diferente da sua resistência determinada nos corpos-de-prova de controle. A resistência acima definida, é a primeira interpretação da resistência característica do concreto.

A resistência característica do concreto que é determinada através de ensaios é a resistência característica estimada. O seu valor é obtido ao se ensinar alguns corpos-de-prova e aplicar aos resultados desses ensaios uma expressão matemática chamada estimador. Assim, estima-se, isto é, quantifica-se aproximadamente, o valor da resistência característica do concreto. A resistência assim determinada é a segunda interpretação da resistência característica do concreto.

A resistência do concreto à compressão é determinada em corpos-de-prova cilíndricos moldados de acordo com a NBR-5738 e ensaiados conforme a NBR-5739. A esses resultados se aplica o estimador para se obter a resistência característica à compressão estimada, $f_{ck,est}$. Quando não for indicada a idade, a resistência refere-se à idade de 28 dias. A estimativa da resistência média à compressão aos j dias de idade, f_{cmj} , correspondente a uma resistência característica f_{ckj} , especificada, deve ser feita conforme indica a NBR-12855.

Uma terceira interpretação para a resistência característica do concreto é a resistência característica especificada, $f_{ck,esp}$. Corresponde ao valor adotado pelo projetista como base para seus cálculos e deve constar das folhas do projeto estrutural. Conforme a NBR-6118, a resistência característica do concreto à compressão a ser especificada no projeto deve ser no mínimo 20 MPa.

Satisfeitas as condições de projeto e execução da NBR-6118, a estrutura terá aceitação automática se $f_{ck,act} \geq f_{ck,esp}$. Quando não houver aceitação automática, a decisão a se tomar será baseada em uma ou mais das seguintes verificações: revisão do projeto adotando-se para o k de concreto em questão $f_{ck} = f_{ck,est}$, ensaios especiais do concreto ou ensaios da estrutura.

A resistência do concreto à tração indireta, $f_{ct,sp}$, é determinada em corpos-de-prova cilíndricos ensaiados à compressão diametral de acordo com a NBR-7222. A resistência do concreto à tração na flexão, f_{ctd} , é determinada em corpos-de-prova prismáticos ensaiados à tração conforme a NBR-12142. A esses resultados se aplica o estimador para se obter a resistência característica estimada à tração indireta ou à tração na flexão.

A resistência do concreto à tração direta, f_{ctd} , pode ser considerada igual a $0,9 f_{ct,sp}$ ou $0,7 f_{ctd}$. Na falta de resultados de ensaios, a resistência característica do concreto à tração direta, f_{ctd} , pode ser avaliada em função da resistência característica à compressão, f_{ck} , pelas expressões:

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck} \cdot \gamma_1 \quad \text{com } f_{ctm} \text{ e } f_{ck} \text{ em MPa}$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ctm}$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ctm}$$

2.7 - Valores de cálculo

Valores de cálculo das ações, das solicitações e das resistências dos materiais nos valores a serem adotados para cálculo segundo o método dos estados limites.

2.7.1 - Valores de cálculo das ações

Os valores de cálculo das ações são seus valores característicos multiplicados pelo coeficiente de ponderação γ_i .

$$F_d = \gamma_i \cdot F_k$$

a) valores de cálculo das ações com relação aos estados limites últimos

$$F_d = 1,4 \cdot F_{k1} + 1,4 \cdot F_{k2} \quad \text{com } F_{k1} \text{ e } F_{k2} \text{ desfavoráveis}$$

$$F_d = F_{k1} \quad \text{com } F_{k1} \text{ e } F_{k2} \text{ favoráveis}$$

onde F_{k1} é o valor característico das ações permanentes e F_{k2} é o valor característico das ações variáveis.

OBSERVAÇÕES:

1. Deve ser entendido que o cálculo considera uma seção de um elemento de uma estrutura que está submetida a uma combinação de ações F_{k1} e F_{k2} distribuídas sobre ela. Por isso, deve-se considerar a combinação mais desfavorável, para a seção analisada, das cargas permanentes e variáveis nas posições onde elas possuem maior.
2. Entende-se que uma ação seja *desfavorável*, quando sua presença em alguma parte da estrutura seja *agrarar/ante* para a seção analisada, isto é, produza aumento da solicitação na seção considerada.
3. Entende-se que uma ação seja *favorável*, quando sua presença em alguma parte da estrutura seja *alevante* para a seção analisada, isto é, produza *alívio* da solicitação na seção considerada.
4. Quando as ações permanentes, F_{k1} , e as ações variáveis, F_{k2} , são desfavoráveis, $\gamma_i = 1,4$ para F_{k1} e $\gamma_i = 1,4$ para F_{k2} .
5. Quando as ações permanentes, F_{k1} , e as ações variáveis, F_{k2} , são favoráveis, $\gamma_i = 1$ para F_{k1} e não se considera a presença de F_{k2} , isto é, $\gamma_i = 0$ para F_{k2} .

6. O coeficiente γ_i considera a variabilidade da intensidade das ações, os desvios gerados durante a construção e as aproximações feitas em projeto que possam agravar o efeito das ações.

7. Para pilares e paredes estruturais com espessura inferior a 19 cm mas não inferior a 12 cm, o coeficiente γ_i deve ser majorado pelo coeficiente de ajustamento $\gamma_a = 1,95 - 0,05b$ onde $b(\text{cm})$ é a menor dimensão da seção. Essa correção se deve ao aumento da probabilidade de ocorrência de desvios relativos e a falhas na construção.

b) Valores de cálculo das ações com relação aos estados limites de utilização

$F_d = F_{gk} + \gamma_{i1} F_{qk}$ para verificação de abertura de fissuras
 $F_d = F_{gk} + \gamma_{i2} F_{qk}$ para verificação de deformações

onde F_{gk} é o valor característico das ações permanentes, F_{qk} é o valor característico das ações variáveis e γ_{i1} e γ_{i2} são coeficientes cujos valores são indicados a seguir.

Edifícios residenciais	$\gamma_{i1} = 0,4$	$\gamma_{i2} = 0,3$
Edifícios comerciais, de escritórios e públicos	$\gamma_{i1} = 0,6$	$\gamma_{i2} = 0,4$
Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens	$\gamma_{i1} = 0,7$	$\gamma_{i2} = 0,6$

OBSERVAÇÃO: Para consideração da ação do vento em combinação com as ações variáveis ou consideração de outras combinações especiais de ações, consultar a norma *ABR-8881 Ações e Segurança nas Estruturas*, seja em situação de estado limite último ou de estado limite de utilização.

2.7.2 - Valores de cálculo das solicitações

As solicitações de cálculo representam o efeito das ações de cálculo e são obtidas por:

$$S_d = \text{efeito de } F_d = \text{efeito de } (\gamma_i F_k)$$

Se o cálculo das solicitações for feito em regime elástico linear, o coeficiente γ_i poderá ser aplicado tanto à ação característica quanto diretamente à solicitação característica.

$$S_d = \text{efeito de } (\gamma_i F_k) = \gamma_i (\text{efeito de } F_k)$$

$$S_d = \gamma_i S_k$$

Se o cálculo das solicitações for feito por processo não-linear, o coeficiente γ_i será aplicado à ação característica:

$$S_d = \text{efeito de } F_d = \text{efeito de } (\gamma_i F_k)$$

a) Valores de cálculo das solicitações com relação aos estados limites últimos

$S_d = 1,4 S_{gk} + 1,4 S_{qk}$ com efeitos de F_{gk} e F_{qk} desfavoráveis
 $S_d = S_{gk}$ com efeitos de F_{gk} e F_{qk} favoráveis

onde S_{gk} é a solicitação devida ao valor característico F_{gk} das ações permanentes e S_{qk} é a solicitação devida ao valor característico F_{qk} das ações variáveis.

OBSERVAÇÃO: Quanto as ações permanentes, F_{gk} , e as ações variáveis, F_{qk} , são favoráveis, $\gamma_i = 1$ para F_{gk} (e portanto também para S_{gk}) e não se considera a presença de F_{qk} (e por isso $S_{qk} = 0$).

b) Valores de cálculo das solicitações com referência aos estados limites de utilização

$S_d = S_{gk} + \gamma_{i1} S_{qk}$ para verificação de abertura de fissuras
 $S_d = S_{gk} + \gamma_{i2} S_{qk}$ para verificação de deformações

onde S_{gk} é a solicitação devida ao valor característico F_{gk} das ações permanentes, S_{qk} é a solicitação devida ao valor característico F_{qk} das ações variáveis e γ_{i1} e γ_{i2} são coeficientes cujos valores são indicados a seguir.

Edifícios residenciais	$\gamma_{i1} = 0,4$	$\gamma_{i2} = 0,3$
Edifícios comerciais, de escritórios e públicos	$\gamma_{i1} = 0,6$	$\gamma_{i2} = 0,4$
Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens	$\gamma_{i1} = 0,7$	$\gamma_{i2} = 0,6$

OBSERVAÇÃO: Aqui é preferível considerar a solicitação de cálculo expressa no formato $S_d = \text{efeito de } F_d$, isto é, calculada com o valor de cálculo de F_d indicado no item 2.7.1-b.

2.7.3 - Valores de cálculo relativos aos materiais

Nos estados limites últimos, nos casos de compressão e tração, os valores de cálculo relativos aos materiais são as resistências de cálculo. Nos outros casos interessam as tensões inferiores divididas pelo coeficiente de ponderação γ_m , como indica a expressão:

a) Valores das resistências de cálculo com relação aos estados limites últimos

Os valores de cálculo das resistências dos materiais são as resistências características inferiores divididas pelo coeficiente de ponderação γ_m , como indica a expressão:

$$f_d = f_k / \gamma_m$$

Tendo em vista a utilização de dois materiais, o índice do coeficiente γ_m pode ser alterado para identificar o material considerado, resultando os símbolos γ_{c1} e γ_{s1} , respectivamente, para o concreto e o aço.

Para o concreto:
 $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_{c1}$ na compressão
 $f_{td} = f_{ctk} / \gamma_{c1}$ na tração

Para o aço:
 $f_{sd} = f_{yk} / \gamma_{s1}$ na tração
 $f_{td} = f_{yk} / \gamma_{s1}$ na compressão

Em condições normais $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$.

No caso de elementos estruturais para cuja execução estejam previstas condições desfavoráveis de trabalho (más condições de execução e de transporte do concreto, adensamento manual, concretagem deficiente por concentração de armadura, dimensões reduzidas dos elementos ou lançamento de grande altura), o coeficiente de ponderação γ_c deve ser multiplicado por 1,1.

No caso de peças pré-moldadas e pré-fabricadas, consultar a *NER-9092 Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-Moldado* a respeito do coeficiente de ponderação γ_c .

Admite-se nas obras de pequena importância, o emprego do aço CA-25, sem que seja necessário o controle de qualidade estabelecido na NBR-7480, desde que o coeficiente de ponderação γ_c seja multiplicado por 1,1.

OBSERVAÇÃO: O coeficiente γ_m considera a variabilidade da resistência do material, a diferença entre a resistência do material no corpo-de-prova e na estrutura e incertezas na determinação das solicitações resistentes em consequência de desvios gerados durante a construção ou em virtude do método de cálculo empregado.

b) Valores das tensões resistentes de cálculo com relação aos estados limites últimos

As tensões resistentes de cálculo são estabelecidas para a determinação das solicitações resistentes de cálculo que não dependem diretamente das resistências dos materiais empregados medidas convencionalmente em ensaios de corpos-de-prova.

Os valores das tensões resistentes de cálculo são estabelecidos em cada caso particular, a partir das teorias de resistência dos elementos estruturais considerados.

Para cisalhamento, torção, punção, estado múltiplo de tensão, pressão em área reduzida e aderência, as solicitações de cálculo, calculadas com ações de cálculo, não devem ultrapassar as solicitações resistentes, calculadas com as tensões resistentes de cálculo.

c) Valores das tensões nos estados limites de utilização

As tensões nos materiais causadas pelas ações em utilização são calculadas, em cada caso particular, a partir das teorias de resistência dos elementos estruturais considerados, em função das combinações de utilização que tenham interesse.

3 – DURABILIDADE DAS ESTRUTURAS

3.1 – Introdução

Entende-se por durabilidade das estruturas a propriedade em virtude da qual elas podem resistir às influências que o meio ambiente exerce sobre elas.

Para assegurar durabilidade às estruturas, existem critérios relacionados com o grau de agressividade do meio ambiente que devem ser seguidos durante o seu projeto. A preocupação nesse sentido é com a qualidade do concreto do cobrimento da armadura e com a fissuração.

3.2 – Agressividade do meio ambiente

A agressividade do meio ambiente está relacionada com as ações físicas e químicas que atuam sobre as estruturas de concreto, independentemente das ações mecânicas, das variações volumétricas de origem térmica, da retração hidráulica e outras que podem ser previstas no projeto.

No projeto das estruturas usuais, a agressividade do ambiente deve ser classificada de acordo com a apresentação da Tabela 3.1 e pode ser avaliada, simplesmente, segundo as condições de exposição da estrutura ou de suas partes.

Tabela 3.1 – Classes de agressividade do ambiente

Classe de agressividade do ambiente	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto		Risco de deterioração da estrutura
		Rural	Submersa	
I	Fraca		Urbana ^{1) 2)}	Insuficiente
II	Moderada	Marinha ¹⁾		Pequeno
III	Forte	Industrial ^{1) 2)}		Grande
IV	Muito forte	Industrial ^{1) 3)}	Respingos de maré	Elevado

¹⁾ Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e plátua).

²⁾ Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) em obras em regiões de clima seco, exceto quando restora do se tiver ou igual a 65%, parte da estrutura protegida de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde chove raramente.

³⁾ Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, eixos de trens, indústrias químicas.

De posse dos dados relativos ao ambiente onde será construída a estrutura, o projetista poderá considerar classificação mais agressiva que a estabelecida na Tabela 3.1.

3.3 – Critérios de projeto que visam a durabilidade

3.3.1 – Drenagem

Deve ser evitada a presença ou a acumulação de água proveniente de chuva ou decorrente da lavagem ou limpeza.

As superfícies expostas que necessitem ser horizontais, tais como coberturas, pátios, garagens, estacionamento e outros, devem ser convenientemente drenadas com disposição de raios e condutores.

Todas as juntas de movimentação ou dilatação, em superfícies sujeitas à ação da água, devem ser convenientemente seladas, de forma a torná-las estanques à passagem de água.

Todos os topos de plantanadas e paredes devem ser protegidos por chapins. Todos os beirais devem ter pingadeiras. Os encontros de níveis diferentes devem ser protegidos por rufos.

3.3.2 – Qualidade do concreto do cobrimento

A durabilidade das estruturas é altamente dependente das características do concreto e também da qualidade e da espessura do concreto do cobrimento da armadura.

Devido a uma forte correspondência que existe entre a relação água/cimento, a resistência do concreto à compressão e a sua durabilidade, permite-se adotar para o concreto armado os requisitos mínimos apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Correspondência entre classe de agressividade e qualidade do concreto

Concreto	Classe de agressividade			
	I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	≤ 0,65	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,45
Classe de concreto	≥ C20	≥ C25	≥ C30	≥ C40

Com relação ao cobrimento, devem ser observadas as exigências apresentadas a seguir.

Para garantir o cobrimento mínimo (c_{min}), o projeto e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc). Assim, as dimensões das barras das armaduras e os espaçadores devem respeitar os cobrimentos nominais indicados na Tabela 3.3 para a tolerância $\Delta c = 10$ mm.

Tabela 3.3 – Cobrimento nominal (c_{nom}) para $\Delta c = 10$ mm

Componente ou elemento	Classe de agressividade			
	I	II	III	IV
Lajes	20	25	35	45
Vigas e pilares	25	30	40	50

Obs.: Nas lajes inferiores de vigas e vigas de rescalços, estagões de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canalizações de efluentes e outras obras em ambientes químicos e liticamente agressivos, a armadura deve ter cobrimento nominal ≥ 45 mm.

Os cobrimentos nominais e mínimos estão sempre referidos à superfície da armadura externa, em geral à face externa dos estribos.

Quando houver um adequado controle de qualidade e rígidos limites de tolerância na variabilidade das medidas durante a execução, pode ser adotado o valor $\Delta c = 5$ mm. Neste caso, permite-se a redução dos cobrimentos nominais da Tabela 3.3 em 5 mm, mas a exigência de controle rigoroso deverá ser explicitada nos desenhos do projeto.

Figura 3.1 indica o cobrimento das armaduras na seção transversal dos elementos mais comuns das estruturas de concreto: lajes, vigas e pilares.

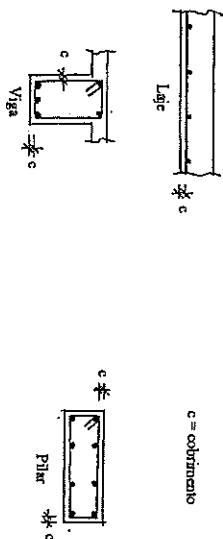


Figura 3.1 – Cobrimento das armaduras em alguns elementos estruturais

3.3.3 – Controle da fissuração e proteção do concreto

A fissuração do concreto nos elementos estruturais é inevitável porque a resistência do concreto à tração é baixa e caracterizada por grande variabilidade. Mesmo em utilização, sob as ações de serviço, valores críticos das tensões de tração podem ser atingidos. Com a finalidade de obter-se um bom desempenho relacionado à proteção das armaduras quanto à corrosão e quanto à aceitabilidade sensorial dos usuários, torna-se necessário controlar a abertura das fissuras no concreto.

De modo geral, a presença de fissuras com aberturas que respeitem os limites indicados abaixo, em estruturas bem projetadas, construídas e submetidas às ações previstas nas normas, não demonstra diminuição da durabilidade ou da segurança quanto aos estados limites últimos.

Admite-se que abertura máxima característica w_k das fissuras que não exceda valores entre 0,2 mm e 0,4 mm, conforme as indicações da Tabela 3.4, sob as ações de cálculo em utilização, não tem importância significativa na corrosão das armaduras.

A Tabela 3.4 apresenta os valores limites de abertura máxima característica w_k das fissuras conforme as classes de agressividade do ambiente. Entretanto, devido ao castigo atual do conhecimento e à grande variabilidade das grandezas envolvidas no processo, esses limites devem ser vistos apenas como indicadores para um projeto adequado das estruturas de concreto.

Tabela 3.4 – Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura

Classe de agressividade do ambiente	Abertura máxima característica das fissuras
I	$w_k \leq 0,4$ mm
II e III	$w_k \leq 0,3$ mm
IV	$w_k \leq 0,2$ mm

Admite-se também que o respeito aos limites indicados na Tabela 3.4 garante o controle da fissuração quanto à aceitabilidade sensorial, isto é, evita a possibilidade de que as fissuras possam causar desconforto psicológico aos usuários, embora a sua presença não represente diminuição da segurança da estrutura com relação aos estados limites últimos.

Limites mais severos de aberturas de fissuras podem ser estabelecidos com o contratante, devendo, porém, ser considerado o possível aumento do custo da estrutura.

4 – ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS PARA SOLICITAÇÕES NORMAIS

4.1 – Introdução

O estudo das seções de concreto tem por finalidade verificar se sob as solicitações majoradas (solicitações de cálculo) a peça não supera cada um dos estados limites, admitindo que os materiais (concreto e aço) tenham como resistência real a resistência minorada (resistência de cálculo).

Neste capítulo se estabelecem as bases de cálculo das seções dos elementos estruturais de concreto armado submetidos às solicitações normais no estado limite último de esgotamento da sua capacidade resistente.

Denominam-se *solicitações normais* aquelas que produzem tensões normais nas seções transversais dos elementos estruturais. Compreendem, neste caso, força normal e momento fletor, ambos referidos ao centro de gravidade da seção transversal de concreto.

Uma seção de concreto armado submetida a solicitações normais pode atingir o estado limite último de esgotamento da capacidade resistente por uma das seguintes causas: deformação plástica excessiva da armadura ou ruptura do concreto.

a) Estado de deformação plástica excessiva

Nas peças submetidas à tração ou à flexão simples ou composta com a linha neutra próxima da borda comprimida, admite-se que o estado limite último seja atingido em virtude de deformação plástica excessiva da armadura, cujo limite é fixado em 1%. A Figura 4.1 mostra os diagramas de deformação na seção transversal de um elemento estrutural no estado limite de deformação plástica excessiva da armadura para os casos indicados acima.

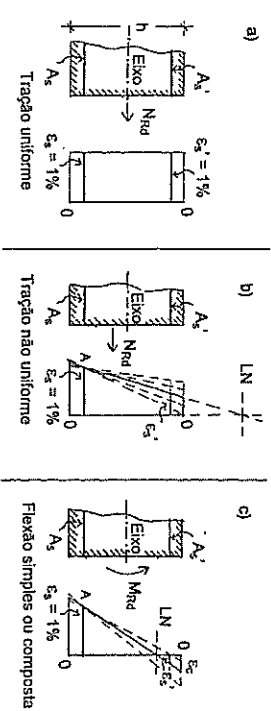


Figura 4.1 – Deformações na seção transversal no estado de deformação plástica excessiva

A Figura 4.1-a representa a tração uniforme e a Figura 4.1-b corresponde à tração não uniforme. Todas as armaduras da seção são traçadas. O estado limite último é alcançado quando a deformação na armadura mais tracionada atingir o limite convencional de 1%.

A Figura 4.1-c representa a flexão simples ou a flexão composta em que a linha neutra está situada perto da borda comprimida da seção. O estado limite último é alcançado quando a deformação na armadura tracionada atingir o limite convencional de 1%, não dando tempo para que ocorra a ruptura do concreto do lado comprimido da seção.

b) Estado de ruptura

A Figura 4.2 mostra os diagramas de deformação na seção transversal de um elemento estrutural no estado limite de ruptura.

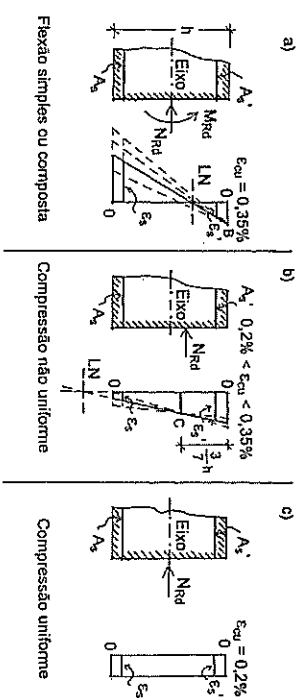


Figura 4.2 – Deformações na seção transversal no estado de ruptura

Nas peças submetidas à flexão simples ou composta com a linha neutra distante da borda comprimida, como mostra a Figura 4.2-a, o estado limite último é atingido por ruptura do concreto quando a deformação na borda comprimida da seção atingir 0,35%. Nessa condição, todos os possíveis diagramas de deformação passam pelo ponto B.

Nas peças submetidas à compressão não uniforme, em que a linha neutra situa-se fora da seção e toda a seção está comprimida, como mostra a Figura 4.2-b, o estado limite último é atingido por ruptura do concreto. A deformação na borda mais comprimida da seção atinja um determinado valor compreendido entre 0,35% e 0,20%, mas na fibra distante (3/7)h da borda mais comprimida ela é constante e vale 0,20%. Nessa condição, todos os possíveis diagramas de deformação passam pelo ponto C.

Nas peças submetidas à compressão uniforme, como mostra a Figura 4.2-c, o estado limite último é alcançado por ruptura do concreto com uma deformação uniforme igual a 0,20%.

A NBR-6118 preconiza para o estudo das seções de concreto armado nas formas de ruína visuais, um método que cobre de maneira contínua todos os casos de solicitações normais, desde a tração uniforme até a compressão uniforme, incluindo as fases intermediárias de solicitações combinadas.

4.2 – Diagramas tensão-deformação dos aços

4.2.1 – Diagramas característicos

Como diagramas característicos dos aços empregados em concreto armado, admitem-se os que são apresentados a seguir.

Para os aços CA-25 e CA-50, obtidos por laminação a quente, adota-se um diagrama bilineite formado pela reta de Hooke e pelo patamar de escoamento, paralelo ao eixo das deformações, cuja ordenada é a resistência ao escoamento característica, f_{yk} , como mostra a Figura 4.3-a.

Para o aço CA-60, obtido por deformação a frio, adota-se como diagrama característico aquele obtido experimentalmente formado pela reta de Hooke e por sua continuação em curva que contém a resistência ao escoamento característica, f_{yk} , como mostra a Figura 4.3-b.

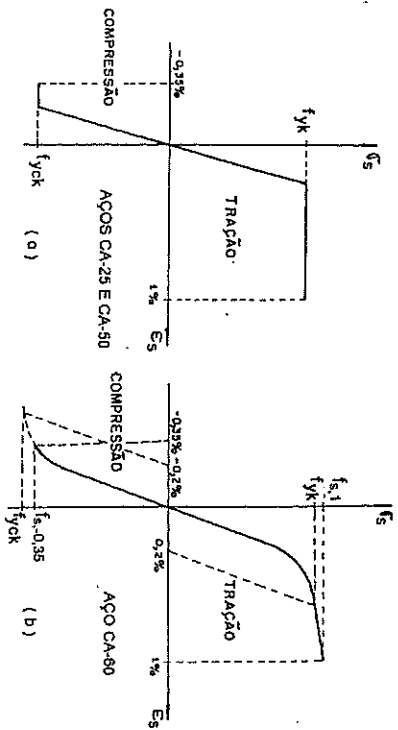


Figura 4.3 – Diagramas característicos dos aços

Para os aços das duas categorias, admite-se o módulo de elasticidade

$$E_s = 210.000 \text{ MPa}$$

Para esses aços, embora o efeito Bauschinger possa não ser desprezível, admite-se um comportamento na compressão análogo ao na tração. Na parte correspondente à tração, o alongamento é limitado em 1%, ou seja ao valor que caracteriza o estado limite de deformação plástica excessiva. Na parte correspondente à compressão, o encurtamento é limitado em 0,35% porque o concreto comprimido solitário à armadura sofre ruptura com encurtamento não superior a 0,35%.

4.2.2 – Diagramas de cálculo

Os diagramas de cálculo dos aços são obtidos a partir dos diagramas característicos mediante uma translação elevada paralelamente à reta de Hooke.

Para os aços CA-25 e CA-50, admite-se um diagrama de cálculo como o apresentado na Figura 4.4-a, ou seja, bilineite, formado pela reta de Hooke e pelo patamar de escoamento, paralelo ao eixo das deformações, cuja ordenada corresponde à resistência ao escoamento de cálculo, $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$.

Para o aço CA-60, o diagrama de cálculo é aquele que contém a resistência ao escoamento de cálculo, $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$, obtido por translação do diagrama característico paralelamente à reta de Hooke, como mostra a Figura 4.4-b.

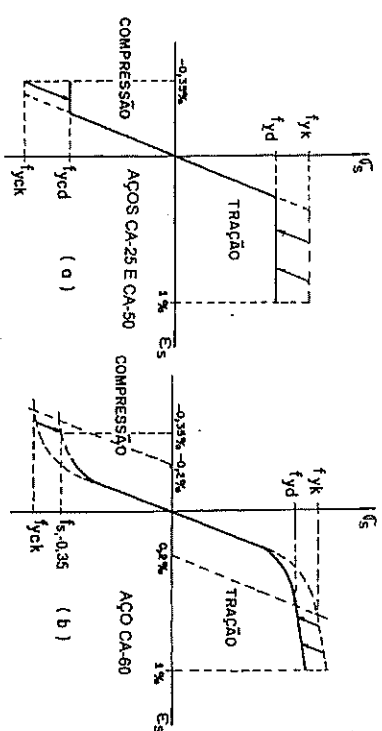


Figura 4.4 – Diagramas de cálculo dos aços

Não sendo conhecido o diagrama real do aço CA-60, adota-se para ele um diagrama de cálculo como o apresentado na Figura 4.5, que é definido pelas expressões:

- para $\sigma_s \leq 0,7f_{yd}$: $\sigma_s = \sigma_s / E_s$
- para $0,7f_{yd} < \sigma_s < f_{yd}$: $\sigma_s = \sigma_s / E_s + (1/145)(\sigma_s / f_{yd} - 0,7)^2$

não se considerando para a tensão σ_s valor superior à resistência de cálculo f_{yk} .

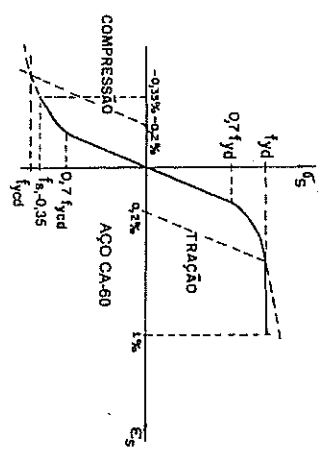


Figura 4.5 – Diagramas de cálculo para o aço CA-60

A parte do diagrama correspondente à compressão é análoga àquela correspondente à tração. O limite para o alongamento é 1% e o limite para o encurtamento é 0,35%. As tensões $0,7f_{yd}$ e $0,7f_{ycd}$ são os limites de proporcionalidade à tração e à compressão, respectivamente.

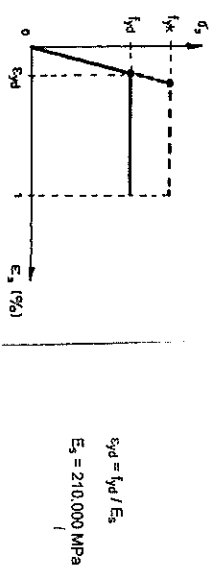
As resistências de cálculo:
 $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$
 $f_{yEd} = f_{yk} / \gamma_s$

são obtidas a partir das resistências características f_{yk} e f_{yk} determinadas experimentalmente, supondo ambas iguais se não houver ensaio de compressão. Na falta de determinação experimental, f_{yk} e f_{yEd} podem ser consideradas iguais e com o valor mínimo, nominal, de f_{yk} fixado pela NBR-7480.

4.2.3 – Valores de cálculo

Os valores das resistências e deformações de cálculo para os aços da NBR-7480 são indicados nas Figuras 4.6 e 4.7.

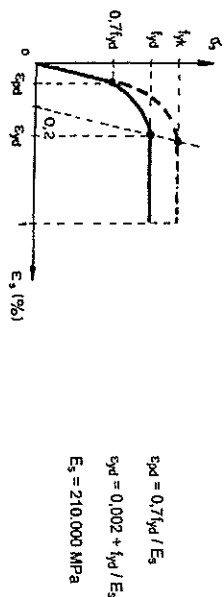
Aços CA-25 e CA-50



	f_{yk} (MPa)	f_{tk} (MPa)	f_k (MPa)	ϵ_{yk}
CA-25	250	217	250	0,001035
CA-50	500	435	500	0,002070

Figura 4.6 – Valores de cálculo para os aços CA-25 e CA-50

Aço CA-60



	f_{yk} (MPa)	f_{tk} (MPa)	f_k (MPa)	ϵ_{yk}	ϵ_{td}
CA-60	600	522	600	0,004484	0,001739

Figura 4.7 – Valores de cálculo para o aço CA-60

4.3 – Diagrama tensão-deformação do concreto

A forma da distribuição de tensões no concreto nas seções submetidas à flexão, na proximidade da ruptura, depende de muitos fatores, como os seguintes:

- posição da linha neutra;
- velocidade de aplicação da carga;
- duração da carga;
- quantidade de armadura;
- forma da seção transversal;
- resistência do concreto e
- idade do concreto ao ser aplicada a carga.

Como decorrência disso, é praticamente impossível conseguir uma única forma de distribuição real de tensões que considere todas as situações existentes.

Além disso, deve-se considerar que, durante os primeiros anos de vida, o concreto passa por um período de maturação acompanhada pela hidratação do cimento, pela transformação dos produtos da hidratação desde o estado de gel até a cristalização e por um processo de secagem. Enquanto isso, a resistência e o módulo de resistência do concreto sofrem variações com o tempo. Simultaneamente, ocorrem deformações que dependem da tensão aplicada e do tempo que influem na forma da distribuição de tensões.

Por todos esses motivos, a forma da distribuição de tensões na região comprimida pode oscilar entre um triângulo ligeiramente arredondado e uma parábola, cujo valor máximo não está situado na borda da seção, mas no seu interior. Na borda comprimida a deformação poderá estar compreendida entre 0,2% e 1%.

Mesmo que se tentasse empregar em cada caso de dimensionamento um diagrama de distribuição de tensões correspondente às condições existentes, não seria possível ser fiel à realidade. Difícilmente seria possível prever o histórico do carregamento, a idade do concreto quando ele começasse a atuar e o grau de solicição que aconteceria. Por essas razões, deve-se utilizar um diagrama que, em cada caso, corresponda às situações mais desfavoráveis, podendo-se conservar a convenção, já atrelada, de que com a idade de 28 dias uma parte ou um elemento da estrutura já está em condições de poder resistir à combinação mais desfavorável dos carregamentos.

Para atender essas necessidades foi proposto o diagrama característico da Figura 4.8-a, que é inspirado no diagrama tensão-deformação real mostrado na Figura 4.8-a.

Os estudos experimentais realizados, considerando combinações de força normal e momento fletor, cargas de curta e de longa duração, formas diferentes de seção, quantidades diferentes de armadura, etc., revelaram que o diagrama parábola-retângulo da Figura 4.9 pode ser aceito como diagrama de cálculo, pois permite determinar, com precisão suficiente para a prática, a solicição de ruptura de uma seção qualquer nas condições mais desfavoráveis.

Esse diagrama não é uma cópia de alguma distribuição verdadeira de tensões. É um diagrama idealizado e que se justifica por levar a resultados concordantes com os obtidos experimentalmente.

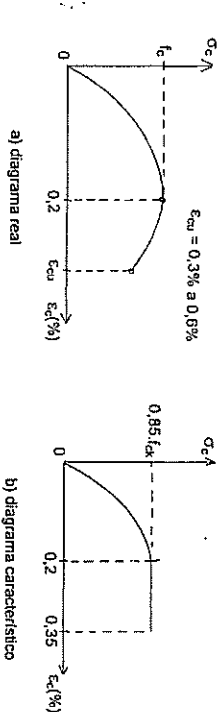


Figura 4.8 – Diagrama tensão-deformação característico para o concreto

Conforme a NBR-6118, o diagrama tensão-deformação do concreto à compressão a ser usado no cálculo, compõe-se de uma parábola do 2º grau que passa pela origem e tem seu vértice no ponto de abscissa 0,2% e ordenada $0,85f_{cd}$ e de um segmento reto entre as deformações de 0,2% e 0,35% tangente à parábola e paralelo ao eixo das abscissas, como mostra a Figura 4.9.

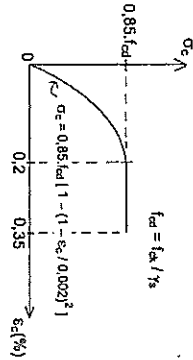


Figura 4.9 – Diagrama tensão-deformação de cálculo para o concreto

4.4 – Hipóteses de cálculo

As hipóteses de cálculo nos estados limites de esgotamento da capacidade resistente da estrutura no seu todo ou em parte, nos casos de flexão simples ou composta, normal ou oblíqua, e de tração e compressão uniformes, excluídas as vigas parede e os consolos curtos, são as seguintes.

1. Sob a influência das solicitações normais, as seções transversais permanecem planas durante a deformação (hipótese de Bernoulli).

Como resultado, as deformações das fibras de uma seção transversal são proporcionais às suas distâncias à linha neutra, ou seja, o diagrama de deformações na seção transversal é retilíneo, como mostra a Figura 4.10.

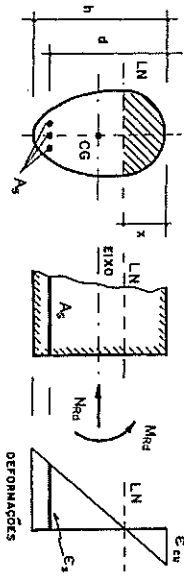


Figura 4.10 – Diagrama de deformações na seção transversal de concreto

2. A resistência do concreto à tração é desprezada.

Em virtude da baixa resistência que o concreto apresenta quando tracionado, na região da seção onde a solicitação produz tensões de tração, admite-se que o concreto esteja fissurado.

3. Existe aderência perfeita entre a armadura e o concreto adjacente não fissurado.

Em vista disso, a deformação nas barras da armadura é a mesma do concreto que a envolve.

4. O alongamento específico, ϵ_s , máximo permitido na armadura de tração é 1%.

Esse limite é adotado convencionalmente por considerar-se que a esse valor correspondem fissuração do concreto e deformação da peça excessivas, dando-se por esgotada sua capacidade resistente.

5. O encurtamento de ruptura do concreto nas seções não intencionalmente comprimidas é 0,35% e nas seções intencionalmente comprimidas o encurtamento da borda mais comprimida, na ocasião da ruptura, varia de 0,35% a 0,2%, mantendo-se constante e igual a 0,2% a deformação a 3/7 da altura total da seção a partir da borda mais comprimida.

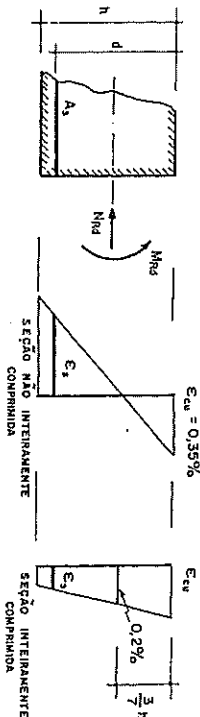


Figura 4.11 – Encurtamento de ruptura do concreto

O encurtamento de ruptura do concreto sofre influência de vários fatores como: velocidade de deformação, forma da seção transversal e posição da linha neutra na seção. O fato de se adotar o encurtamento de ruptura do concreto conforme o critério exposto é uma hipótese justificadora amparada em resultados de ensaios. Na verdade, os resultados experimentais justificam os valores 0,35% para as seções não intencionalmente comprimidas e 0,2% para as seções intencionalmente comprimidas, como mostra a Figura 4.11. Ao mesmo tempo, parece lógico supor uma passagem contínua de 0,35% para 0,2% para os casos de compressão não uniforme, o que é feito da forma exposta na hipótese 5.

6. A distribuição das tensões no concreto na seção transversal se faz de acordo com um diagrama parábolo-retângulo, como mostra a Figura 4.12, baseado no diagrama tensão-deformação adotado para o concreto. Permite-se a substituição desse diagrama por um retângulo de altura $y = 0,8x$, com a seguinte tensão:

$0,85f_{cd}$ no caso em que a largura da seção medida paralelamente à linha neutra não diminui desta para a borda comprimida;
 $0,8f_{cd}$ em caso contrário.

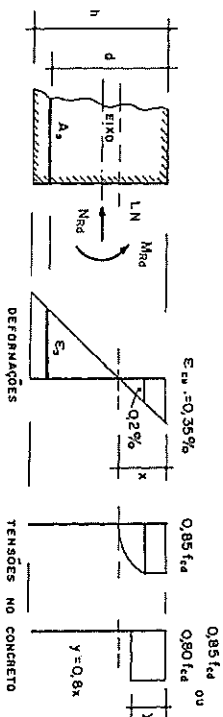


Figura 4.12 – Distribuição de tensões no concreto

Para os cálculos de verificação e dimensionamento é necessário admitir uma forma para a distribuição de tensões de compressão na seção de concreto como mostra a Figura 4.12.

Estudos comparativos entre várias formas adotadas para essa distribuição evidenciaram que uma distribuição composta por uma parábola do 2.º grau desde a linha neutra até a fibra com deformação de 0,2% completada com um segmento reto até a borda mais comprimida, onde a tensão vale 0,85f_{cd}, fornece boa concordância com os resultados obtidos experimentalmente.

Sendo válido o diagrama parábola-retângulo para qualquer forma de seção transversal, e portanto para qualquer forma de região comprimida, ele pode ser usado também na flexão oblíqua. O diagrama retângulo de tensões adotado fornece uma resultante de tensões que concorda em intensidade e ponto de aplicação com a que lhe corresponde no diagrama parábola-retângulo. No entanto diferenças apreciáveis se verificam entre eles quando a linha neutra se situa muito perto da borda comprimida porque as tensões correspondem à parte curva da distribuição real de tensões e, portanto, com valor inferior a 0,85f_{cd}. Apesar disso os resultados finais são idênticos. O coeficiente 0,85 reduzidor da resistência de cálculo do concreto considera a diminuição da sua resistência por influência da deformação lenta (efeito Rüschi) causada por ações de longa duração, pelo crescimento da sua resistência com o tempo e pela diferença entre a resistência do concreto na estrutura e aquela determinada nos corpos-de-prova de controle.

7. A tensão na armadura é a correspondente à deformação determinada de acordo com as hipóteses anteriores e obtida do diagrama tensão-deformação do aço correspondente.

8. O estado limite último é caracterizado quando a distribuição de deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios de deformação definidos na Figura 4.13.

4.5 – Domínios de deformação

As configurações possíveis do diagrama de deformações correspondentes ao estado limite último para uma seção submetida a solicitações normais sugerem a delimitação de regiões, chamadas domínios de deformação, onde poderá estar contido o diagrama de deformações referente a um determinado caso de solicitação normal quando o estado limite último for atingido.

Na Figura 4.13 estão representados os domínios de deformação e as retas que correspondem aos limites entre cada um deles.

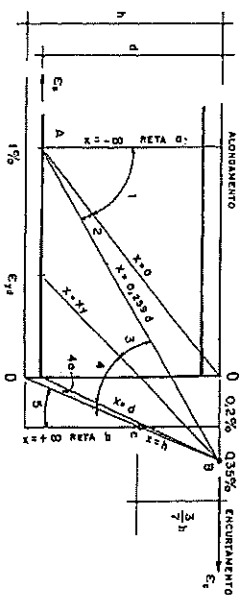


Figura 4.13 – Domínios de deformação

Os domínios 1 e 2 correspondem ao estado limite último de deformação plástica excessiva e são fixados pelo ponto A, determinado pelo alongamento de 1% na armadura mais solicitada. Para todas as situações correspondentes aos domínios 1 e 2 a reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto A.

Os domínios 3, 4 e 4a referem-se ao estado limite último de ruptura do concreto na flexão e são fixados pelo ponto B, que corresponde ao encurtamento de 0,35% na borda comprimida da seção. Para todas as situações correspondentes aos domínios 3, 4 e 4a a reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto B.

O domínio 5 refere-se ao estado limite último de ruptura do concreto na compressão não uniforme e é fixado pelo ponto C, que corresponde ao encurtamento de 0,2% na fibra distante (3R/h) da borda mais comprimida da seção. Para todas as situações correspondentes ao domínio 5 a reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto C.

Domínio 1

A reta a corresponde à tração uniforme, caso em que toda a seção é traçada uniformemente. O diagrama de deformações na seção é representado por uma reta paralela à seção que é a origem das deformações. A posição da linha neutra é dada por $x = -\infty$. O estado limite último é atingido por deformação plástica excessiva das armaduras sendo caracterizado pelo alongamento de 1%. Por isso, a reta a passa pelo ponto A. A seção resistente é constituída somente pelas armaduras, pois o concreto traçado é considerado fissurado.

Domínio 2

Arranque os casos de flexão simples e flexão composta com grande excentricidade. A linha neutra é interna à seção e a reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto B. Refere-se aos casos em que o alongamento na borda alijada o limite de 1% e o encurtamento da fibra mais comprimida de concreto é inferior a 0,35%. A reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto A. Cobre o campo de profundidade da linha neutra desde $x > 0$ até $x < 0,259d$. O estado limite último é atingido por deformação plástica excessiva da armadura sem haver ruptura do concreto na região comprimida da seção.

Domínio 3

O domínio 3 corresponde aos casos de flexão simples e flexão composta com grande excentricidade. A linha neutra é interna à seção e a reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto B, correspondente ao encurtamento de 0,35% na borda comprimida. Arranque os casos em que no estado limite último o encurtamento de 0,35% é alcançado na borda comprimida da seção e o alongamento da armadura está compreendido entre 1% e 5%. O estado limite último é caracterizado pela ruptura do concreto comprimido após o escoamento da armadura. Cobre o campo de profundidade da linha neutra desde $x \geq 0,259d$ até $x \leq x_y$. Esta é a situação desejável para projeto pois os materiais são aproveitados de forma econômica e a ruína poderá ser avisada pelo aparecimento de muitas fissuras decorrentes do escoamento da armadura. As peças de concreto armado nessas condições são denominadas peças sub-armadas.

Domínio 4

O domínio 4 abrange os casos de flexão simples e flexão composta com grande excentricidade. A linha neutra é interna à seção e a reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto B. Refere-se aos casos em que no estado limite último o encurtamento de 0,35% é alcançado na borda comprimida da seção e o alongamento da armadura está situado entre 5% e 0. O estado limite último é caracterizado pela ruptura do concreto comprimido sem que haja escoamento da armadura. Cobre o campo de profundidade da linha neutra desde $x > x_y$ até $x < d$. Apesar do aparecimento eventual de fissuras, estas possuem abertura muito fina ainda no instante que precede a ruptura. Esta se dá de modo brusco e sem aviso, porque o concreto sofre esmagamento na região comprimida da seção antes que a armadura traçada permita a abertura de fissuras visíveis que sirvam de advertência. As peças de concreto armado nessas condições são denominadas peças super-armadas e devem ser evitadas tanto quanto possível. Na flexão simples esta situação sempre poderá ser evitada, mas na flexão composta nem sempre será possível.

Domínio 4a
 O domínio 4a corresponde à flexão composta com pequena excentricidade. As armaduras são comprimidas e existe apenas uma pequena região de concreto tracionada próxima a uma das bordas da seção. Somente poderá ocorrer flexo-compressão. A linha neutra é interna à seção, mas situa-se entre a armadura menos comprimida e a borda tracionada da seção. Cobre o campo de profundidade da linha neutra desde $x \geq d$ até $x \leq h$. A reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto B. O estado limite último é caracterizado pela ruptura do concreto com encurtamento de 0,35% na borda comprimida da seção, sem aparecimento de fissuras.

Domínio 5
 O domínio 5 refere-se à compressão não uniforme com toda a seção de concreto comprimida. A linha neutra é externa à seção e a reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto C, afastado $(3d/7)$ da borda mais comprimida e correspondendo a um encurtamento de 0,2% nessa fibra da seção. Cobre o campo de profundidade da linha neutra desde $x > h$ até $x < -1a$. O estado limite último é atingido pela ruptura do concreto comprimido com encurtamento na borda mais comprimida situado entre 0,35% e 0,2%, dependendo da posição da linha neutra, mas constante e igual a 0,2% na fibra que passa pelo ponto C.

Reta b
 A reta b corresponde à compressão uniforme, caso em que toda a seção é comprimida uniformemente. O diagrama de deformações na seção é representado por uma reta paralela à seção, que é a origem das deformações. A posição da linha neutra é dada por $x = -1a$. O estado limite último é atingido por ruptura do concreto com encurtamento de 0,2%. Por isso, a reta b passa pelo ponto C. A seção resistente é constituída pelo concreto e pelas armaduras, sendo a deformação nestas igual à do concreto, ou seja, 0,2%.

4.6 – Equações de equilíbrio e de compatibilidade

O estudo geral das seções dos elementos estruturais de concreto armado submetidos a solicitações normais no estado limite último de esgotamento da sua capacidade resistente deve tratar de seções com forma qualquer e com uma distribuição qualquer de armadura.

Neste tópico são consideradas somente as seções com um eixo de simetria submetidas a solicitações normais que atuam segundo um plano que contém esse eixo e com um par de armaduras principais, cujas áreas de seção transversal são indicadas por A_{s1} e A_{s2} .

Considere-se uma seção de forma qualquer, mas simétrica em relação ao plano de flexão, submetida à força normal resistente de cálculo N_{Ed} e ao momento fletor resistente de cálculo M_{Ed} , relativos ao centro de gravidade da seção transversal de concreto, e com armaduras de áreas A_{s1} e A_{s2} , como mostra a Figura 4.14. Estes são os esforços que espelham a resistência da seção.

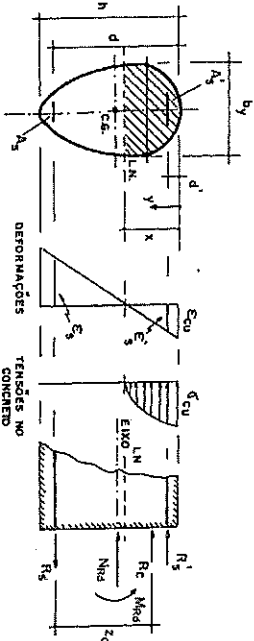


Figura 4.14 – Seção transversal e esforços resistentes

A notação empregada é a seguinte:

- N_{Ed} = força normal resistente de cálculo
- M_{Ed} = momento fletor resistente de cálculo
- N_{Sd} = força normal solitante de cálculo
- M_{Sd} = momento fletor solitante de cálculo
- A_{s1} = área da seção transversal da armadura mais tracionada ou menos comprimida
- A_{s2} = área da seção transversal da armadura mais comprimida ou menos tracionada
- h = altura total da seção
- d = altura útil da seção
- d' = distância do centro de gravidade da armadura até a borda da seção mais próxima
- x = distância da linha neutra até a borda mais comprimida ou menos tracionada da seção
- y = ordenada contada a partir da borda mais comprimida
- b_y = largura da seção na fibra de ordenada y
- σ_c = tensão de compressão no concreto
- σ_{cy} = tensão de compressão no concreto na fibra de ordenada y
- σ_s = tensão na armadura de área A_{s1}
- σ'_s = tensão na armadura de área A_{s2}
- R_c = resultante das tensões de compressão no concreto
- R_s = resultante das tensões na armadura de área A_{s1}
- R'_s = resultante das tensões na armadura de área A_{s2}
- z_c = distância entre o ponto de aplicação da resultante de compressão no concreto e o centro de gravidade da armadura de área A_{s1}

Como a flexão-compressão constitui-se na solicitação mais frequente, considera-se a força normal com sinal positivo quando for de compressão e com sinal negativo quando for de tração. O momento fletor é considerado positivo quando provocar tração na borda inferior da seção. As tensões internas e suas resultantes são consideradas positivas quando forem de compressão e negativas quando forem de tração.

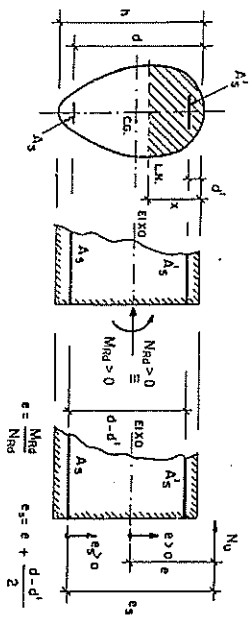


Figura 4.15 – Seção transversal e esforços resistentes

O sistema de esforços substituído por N_{Ed} e M_{Ed} referidos ao centro de gravidade da seção transversal de concreto pode ser reduzido a um sistema equivalente formado pela força normal N_{Ed} aplicada com excentricidade e em relação ao centro de gravidade da seção transversal de concreto, como mostra a Figura 4.15, onde:

$$e = M_{Ed} / N_{Ed}$$

A excentricidade e_3 de M_{rd} em relação ao centro de gravidade da seção de armadura de área A_s vale:

$$e_3 = e + (d - d') / 2$$

A excentricidade e_3 é considerada positiva a partir do centro de gravidade da seção de armadura de área A_s no sentido da borda mais comprimida da seção transversal de concreto.

Considerando-se as resultantes internas como indica a Figura 4.14 e referindo-se os momentos dessas resultantes ao centro de gravidade da seção de armadura de área A_s , as equações de equilíbrio no estado limite último são escritas nas seguintes formas:

$$N_{rd} = R_c + R_s + R_s$$

$$M_{rd} e_3 = R_c z_c + R_s (d - d')$$

$$N_{rd} = \int_0^h b_y \sigma_y dy + A_s \sigma_s + A_c \sigma_c$$

$$M_{rd} e_3 = \int_0^h b_y \sigma_y (d - y) dy + A_s \sigma_s (d - d')$$

onde os sinais dos esforços são considerados conforme a convenção adotada.

Na verificação e no dimensionamento das seções dos elementos estruturais de concreto armado à flexão simples ou composta, admite-se que seus esforços solicitantes sejam aqueles decorrentes do valor de cálculo das ações que os levam ao estado limite último. Assim, os valores de cálculo da força normal solicitante, N_{scl} , e do momento fletor solicitante, M_{scl} , não devem superar, respectivamente, os valores de cálculo da força normal resistente, N_{rd} , e do momento fletor resistente, M_{rd} .

$$N_{scl} \leq N_{rd} \quad \text{e} \quad M_{scl} \leq M_{rd}$$

Considerando-se positivos os encurtamentos e negativos os alongamentos, a equação de compatibilidade das deformações tem a seguinte forma:

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s'}{d - d'} = \frac{\epsilon_s}{x - d}$$

Nesta equação:

- ϵ_c = deformação específica do concreto na borda mais comprimida da seção
- ϵ_s = deformação específica da armadura de área A_s
- ϵ_s' = deformação específica da armadura de área A_s'

Com a convenção adotada, as equações de equilíbrio e de compatibilidade de deformações são válidas para qualquer domínio de deformação e para qualquer caso de solicitação normal, desde a tração uniforme até a compressão uniforme, passando pelos casos intermediários de flexão simples e de solicitações combinadas.

Daqui a diante as tensões e deformações serão consideradas em valor absoluto. As resultantes internas de compressão e de tração já serão orientadas nos seus sentidos de aplicação e os sinais correspondentes serão incluídos nas expressões de cálculo. O momento solicitante de cálculo, M_{scl} , será considerado sempre positivo e a força normal solicitante de cálculo, N_{scl} , será positiva quando de compressão e negativa quando de tração.

5 – FLEXÃO NORMAL SIMPLES

5.1 – Introdução

Flexão normal é aquela em que o plano de flexão contém um dos eixos principais de inércia da seção transversal.

Flexão simples é aquela que se verifica com ausência de força normal. Nas estruturas de concreto a flexão normal simples ocorre nas vigas e nas lajes. Ocorre também nos muros de arrimo e nas paredes telhas de concreto, desde que existam somente ações horizontais não coexistindo ações verticais.

Na flexão normal simples a linha neutra corta a seção transversal e situa-se entre sua borda comprimida e o centro de gravidade da seção de armadura tracionada: $0 < x < d$. Por isso, ocorre nos domínios de deformações 2, 3 e 4.

Considere-se uma seção de concreto com forma qualquer, mas simétrica em relação ao plano de flexão, com armaduras cujas áreas de seção transversal sejam A_s e A_s' , submetida a um momento fletor M_{rd} , como mostra a Figura 5.1. Este é o momento que segura a resistência da seção.

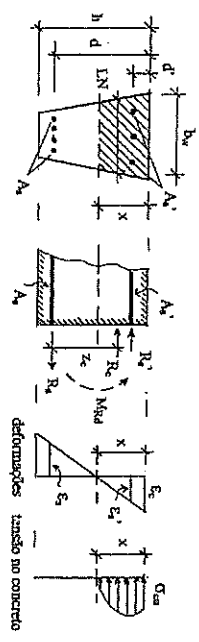


Figura 5.1 – Flexão normal simples de uma viga com seção qualquer simétrica

Considerando a Figura 5.1, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} 0 = R_c + R_s' - R_s \\ M_{rd} = R_c z_c + R_s' (d - d') \end{cases}$$

onde :

- M_{rd} = momento fletor resistente de cálculo
- R_c = resultante de compressão na área comprimida de concreto
- R_s' = resultante de compressão na área de armadura comprimida A_s'
- R_s = resultante de tração na área de armadura tracionada A_s
- d = distância do centro de gravidade da área de armadura tracionada até a borda comprimida da seção transversal de concreto (altura útil da seção)
- d' = distância do centro de gravidade da área de armadura comprimida até a borda comprimida da seção transversal de concreto
- z_c = distância do ponto de aplicação de R_c até o centro de gravidade da área de armadura tracionada (traço de alavanca das resultantes R_c e R_s)
- b_w = largura da alma da seção transversal de concreto
- h = altura total da seção transversal de concreto

Considerando a Figura 5.1, vem a equação de compatibilidade de deformações:

$$e_c / x = e_s / (x - d') = e_s' / (d - x)$$

onde:

- x = distância da linha neutra até a borda comprimida da seção transversal de concreto
- e_c = encurtamento do concreto na borda comprimida da seção
- e_s' = encurtamento da armadura comprimida
- e_s = alongamento da armadura tracionada

5.2 – Posição da linha neutra

A distância x pode ser relacionada com as deformações na borda comprimida da seção de concreto e na armadura tracionada. Da equação de compatibilidade vem:

$$e_c / x = e_s / (d - x) \quad \therefore \quad x = [e_c / (e_c + e_s)] d$$

Por ser mais significativo conhecer a posição relativa da linha neutra na seção transversal de concreto, define-se o coeficiente adimensional:

$$\beta_x = x / d$$

Sendo $x = [e_c / (e_c + e_s)] d$, como consequência dessa definição, resulta:

$$\beta_x = e_c / (e_c + e_s)$$

5.3 – Deformação e tensão na armadura tracionada

A_s = área da seção transversal da armadura tracionada

e_s = alongamento na armadura tracionada

σ_s = tensão na armadura tracionada

5.3.1 – Domínio 2

No domínio 2 tem-se $0 < x < 0,259 \cdot d$ e portanto $0 < \beta_x < 0,259$

$0 < e_c < e_{cu} = 0,35\%$

$e_s = 1\% > \epsilon_{yd}$

Do diagrama tensão-deformação dos aços, conclui-se que:

$$\sigma_s = f_{yd}$$

5.3.2 – Domínio 3

No domínio 3 tem-se $0,259 \cdot d \leq x \leq x_y$ e portanto $0,259 \leq \beta_x \leq \beta_{xy}$

$e_c = e_{cu} = 0,35\%$

$\epsilon_{yd} \leq e_s < 1\%$

Do diagrama tensão-deformação dos aços, conclui-se que:

$$\sigma_s = f_{yd}$$

As peças situadas no domínio 3 são denominadas peças *sub-armadas*. São aquelas em que a armadura tracionada atinge o escoamento antes da ruptura do concreto por compressão na seção onde ocorre a ruína.

Define-se x_y como aquele valor particular de x quando, na ruína, ocorrem ao mesmo tempo $e_c = e_{cu} = 0,35\%$ na borda comprimida da seção e $e_s = \epsilon_{yd}$ na armadura de tração. Assim, das relações anteriores vem:

$$x_y = [e_{cu} / (e_{cu} + \epsilon_{yd})] d \quad \therefore \quad x_y = [0,0035 / (0,0035 + \epsilon_{yd})] d$$

Assim: A esse valor particular x_y corresponde o valor particular de β_x definido como $\beta_{xy} = x_y / d$.

$$\beta_{xy} = e_{cu} / (e_{cu} + \epsilon_{yd}) \quad \therefore \quad \beta_{xy} = 0,0035 / (0,0035 + \epsilon_{yd})$$

Para os aços empregados em concreto armado, conhecidos seus respectivos valores para ϵ_{yd} , pode-se determinar os correspondentes valores de β_{xy} . Os valores de β_{xy} para os aços nacionais encontram-se relacionados na tabela seguinte:

AÇOS	ϵ_{yd}	β_{xy}
CA-25	0,001035	0,772
CA-50	0,002070	0,628
CA-50	0,004184	0,439

5.3.3 – Domínio 4

No domínio 4 tem-se $x_y < x < d$ e portanto $\beta_{xy} < \beta_x < 1$. Então:

$e_c = e_{cu} = 0,35\%$

$0 < e_s < \epsilon_{yd}$

Do diagrama tensão-deformação dos aços, conclui-se que:

$$0 < \sigma_s < f_{yd}$$

As peças situadas no domínio 4 são denominadas peças *super-armadas*. São aquelas em que há ruptura do concreto comprimido sem escoamento da armadura tracionada na seção onde ocorre a ruína.

Então a tensão σ_s na armadura deve ser determinada em função da sua deformação e_s , indicada no diagrama da Figura 5.2.

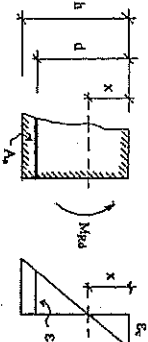


Figura 5.2 – Flexão normal simples de uma viga de concreto armado

Da equação de compatibilidade de deformações vem:

$$e_{cu} / x = e_s / (d - x) \quad \therefore \quad e_s = e_{cu} (d - x) / x$$

Com $\epsilon_{cu} = 0,0035$ e $x = \beta_x \cdot d$, resulta:
 $\epsilon_s = 0,0035 \cdot (1 - \beta_x) / \beta_x$

A Figura 5.3 apresenta os diagramas tensão-deformação dos aços para concreto armado.

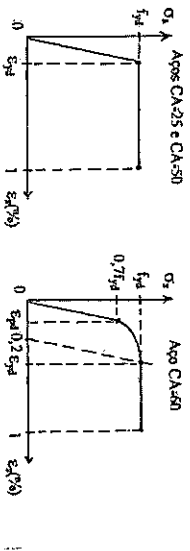


Figura 5.3 – Diagramas tensão-deformação dos aços para concreto armado

a) Aços CA-25 e CA-50

Para $\beta_x < \beta_x < 1$ o diagrama tensão-deformação indica $0 < \epsilon_s < \epsilon_{yk}$. Portanto, a tensão será $0 < \sigma_s < f_{yd}$ correspondente à reta de Hooke:
 $\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$

b) Aço CA-60

Para $\beta_x < \beta_x < 1$ o diagrama tensão-deformação indica $0 < \epsilon_s < \epsilon_{yk}$. Portanto, a tensão será $0 < \sigma_s < f_{yd}$ correspondente à reta de Hooke ou ao trecho curvo do diagrama. Define-se x_p como aquele valor particular de x quando, na ruína, ocorrem ao mesmo tempo $\epsilon_c = \epsilon_{cu} = \epsilon_{cu}$ na borda comprimida da seção e $\epsilon_s = \epsilon_{yk}$ na armadura de tração. Assim:

$$x_p = [\epsilon_{cu} / (\epsilon_{cu} + \epsilon_{yk})] \cdot d \quad \therefore \quad x_p = [0,0035 / (0,0035 + \epsilon_{yk})] \cdot d$$

Assim: A esse valor particular x_p corresponde o valor particular de β_x definido como $\beta_{xp} = x_p / d$.

$$\beta_{xp} = \epsilon_{cu} / (\epsilon_{cu} + \epsilon_{yk}) \quad \therefore \quad \beta_{xp} = 0,0035 / (0,0035 + \epsilon_{yk})$$

Para o aço CA-60, conhecido o valor de ϵ_{pd} , pode-se determinar o correspondente valor de β_{xp} . O valor de β_{xp} para o aço CA-60 encontra-se na tabela seguinte.

Valores de ϵ_{pd} e do coeficiente β_{xp}		
AÇO	ϵ_{pd}	β_{xp}
CA-60	0,001739	0,658

- Para $\beta_x < \beta_x < \beta_{xp}$ o diagrama tensão-deformação indica $\epsilon_{pd} \leq \epsilon_s < \epsilon_{yk}$. Portanto, a tensão será $0,7f_{yd} \leq \sigma_s < f_{yd}$ correspondente ao trecho curvo do diagrama:

$$\sigma_s = f_{yd} + (45f_{yd}^2 / E_s - 1,4f_{yd}) \cdot \epsilon_s - (45\epsilon_s - 0,49) \cdot f_{yd}^2 = 0$$

- Para $\beta_{xp} \leq \beta_x < 1$ o diagrama tensão-deformação indica $0 < \epsilon_s \leq \epsilon_{yk}$. Portanto, a tensão será $0 < \sigma_s \leq 0,7f_{yd}$ correspondente à reta de Hooke:
 $\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$

5.4 – Deformação e tensão na armadura comprimida

A_s' = área da seção transversal da armadura comprimida
 ϵ_s' = encurtamento na armadura comprimida
 σ_s' = tensão na armadura comprimida

5.4.1 – Deformação no domínio 2

No domínio 2 tem-se $0 < x < 0,259 \cdot d$ e portanto $0 < \beta_x < 0,259$
 $0 < \epsilon_c < \epsilon_{cu} = 0,35\%$
 $\epsilon_s = 1\%$

A tensão σ_s' na armadura deve ser determinada em função da sua deformação ϵ_s' , indicada no diagrama da Figura 5.4.

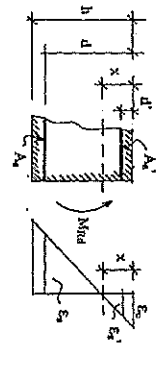


Figura 5.4 – Flexão normal simples de uma viga de concreto armado

Da equação de compatibilidade de deformações vem:

$$\epsilon_s' / (x - d') = \epsilon_s / (d - x) \quad \therefore \quad \epsilon_s' = \epsilon_s \cdot (x - d') / (d - x)$$

Define-se aqui a relação $\eta = d'/d$.

Com $\epsilon_s = 0,01$, $x = \beta_x \cdot d$ e $d' = \eta \cdot d$ resulta:

$$\epsilon_s' = 0,01 \cdot (\beta_x - \eta) / (1 - \beta_x)$$

5.4.2 – Deformação nos domínios 3 e 4

Nos domínios 3 e 4 tem-se $0,259 \cdot d \leq x < d$ e portanto $0,259 \leq \beta_x < 1$. Então:
 $\epsilon_c = \epsilon_{cu} = 0,35\%$
 $0 < \epsilon_s \leq 1\%$

A tensão σ_s' na armadura deve ser determinada em função da sua deformação ϵ_s' , indicada no diagrama da Figura 5.5.

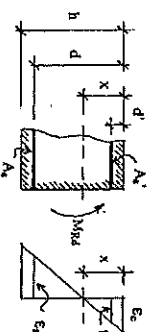


Figura 5.5 – Flexão normal simples de uma viga de concreto armado.

Da equação de compatibilidade de deformações vem:

$$\epsilon_s' / (x - d) = \epsilon_{cu} / x \quad \therefore \quad \epsilon_s' = \epsilon_{cu} (x - d) / x$$

Com $\epsilon_{cu} = 0,0035$, $x = \beta_{xy} d$ e $d' = \eta d$ resulta:

$$\epsilon_s' = 0,0035 (\beta_{xy} x - \eta) / \beta_{xy}$$

5.4.3 – Tensão para os aços CA-25 e CA-50

Para que a armadura comprimida constitua por aço CA-25 ou CA-50 alcance o escoamento com $\sigma_s' = f_{ycd}$ é preciso que o encurtamento seja $\epsilon_s' \geq \epsilon_{ycd}$.

Define-se β_{xy} como aquele valor particular de β_x que, na linha, corresponde a $\epsilon_s' = \epsilon_{ycd}$ na armadura de compressão. Assim, das relações anteriores escolhidas para ϵ_s' nos domínios 2, 3 e 4 resultam os valores de β_{xy} relacionados na tabela seguinte.

AÇOS		Valores de ϵ_{ycd} e do coeficiente β_{xy}			
ϵ_{ycd}	$\eta = 0,05$	$\eta = 0,08$	$\eta = 0,10$	$\eta = 0,12$	$\eta = 0,15$
CA-25	0,001035	0,139	0,166	0,194	0,203
CA-50	0,002070	0,213	0,238	0,254	0,297

- Para $\beta_x \geq \beta_{xy}$ corresponde $\epsilon_s' \geq \epsilon_{ycd}$. Do diagrama tensão-deformação dos aços CA-25 e CA-50 conclui-se que:

- Para $\beta_x < \beta_{xy}$ corresponde $\epsilon_s' < \epsilon_{ycd}$. Do diagrama tensão-deformação dos aços CA-25 e CA-50 conclui-se que a tensão será $0 < \sigma_s' < f_{ycd}$ correspondente à reta de Hooke: $\sigma_s' = E_s \epsilon_s'$

5.4.4 – Tensão para o aço CA-60

O aço CA-60 não atinge o escoamento quando usado como armadura comprimida. Porque para esse aço $\epsilon_{ycd} > \epsilon_{cu} = 0,35\%$, a deformação sempre será $0 < \epsilon_s' < \epsilon_{ycd}$. Por isso, a tensão sempre será $0 < \sigma_s' < f_{ycd}$.

Com a linha neutra mais profunda na seção pode ocorrer $\epsilon_{ycd} \leq \epsilon_s' < \epsilon_{ycd}$ e então será $0,7 f_{ycd} \leq \sigma_s' < f_{ycd}$ correspondente ao trecho curvo do diagrama tensão-deformação. Com a linha neutra menos profunda na seção pode ocorrer $0 < \epsilon_s' \leq \epsilon_{ycd}$ e então será $0 < \sigma_s' \leq 0,7 f_{ycd}$ correspondente à reta de Hooke.

Define-se β_{xy} como aquele valor particular de β_x que, na linha, corresponde a $\epsilon_s' = \epsilon_{ycd}$ na armadura de compressão. Assim, das relações anteriores escolhidas para ϵ_s' nos domínios 2, 3 e 4 resultam os valores de β_{xy} relacionados na tabela seguinte.

AÇO		Valores de ϵ_{ycd} e do coeficiente β_{xy}			
ϵ_{ycd}	$\eta = 0,05$	$\eta = 0,08$	$\eta = 0,10$	$\eta = 0,12$	$\eta = 0,15$
CA-60	0,001739	0,191	0,216	0,233	0,250

- Para $\beta_x \geq \beta_{xy}$ corresponde $\epsilon_{ycd} \leq \epsilon_s' < \epsilon_{ycd}$. Do diagrama tensão-deformação do aço CA-60 conclui-se que a tensão será $0,7 f_{ycd} \leq \sigma_s' < f_{ycd}$ correspondente ao trecho curvo do diagrama tensão-deformação: $\sigma_s' = \frac{E_s \epsilon_s'^2}{2} + (45 f_{ycd}^2 / E_s - 1,4 f_{ycd}) \epsilon_s' - (45 \sigma_s' - 0,49) f_{ycd}^2 = 0$

- Para $\beta_x \leq \beta_{xy}$ corresponde $0 < \epsilon_s' \leq \epsilon_{ycd}$. Do diagrama tensão-deformação desse aço conclui-se que a tensão será $0 < \sigma_s' \leq 0,7 f_{ycd}$ correspondente à reta de Hooke: $\sigma_s' = E_s \epsilon_s'$

5.5 – Cálculo de verificação de seções retangulares

Adotar-se-á no cálculo o diagrama retangular de tensões de compressão no concreto.

5.5.1 – Seções retangulares com armadura simples

Denominam-se seções com armadura simples aquelas que possuem armadura somente no lado tracionado. Também são denominadas seções com armadura unilateral.

Considere-se uma seção de concreto com forma retangular e uma armadura tracionada cuja área de seção transversal é A_s , submetida a um momento fletor M_{Ed} que a leve ao estado limite último, como mostra a Figura 5.6. Este momento é denominado momento resistente de cálculo.

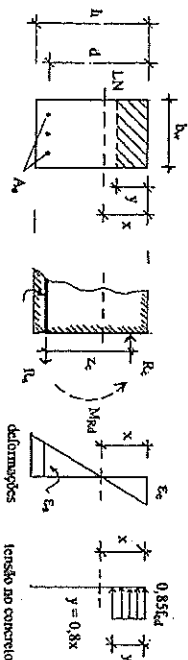


Figura 5.6 – Flexão normal simples de uma viga com seção retangular e com armadura simples

Considerando a Figura 5.6, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} 0 = R_c - R_s \\ M_{Ed} = R_c z_c = R_s z_e \end{cases}$$

$$R_c = b_w y 0,85 f_{cd}$$

$$R_s = A_s \sigma_s$$

$$z_c = d - y / 2$$

$$\text{Então: } \begin{cases} 0 = b_w y 0,85 f_{cd} - A_s \sigma_s \\ M_{Ed} = b_w y 0,85 f_{cd} (d - y / 2) = A_s \sigma_s (d - y / 2) \end{cases}$$

$$\text{Com } y = 0,8x \text{ e } x = \beta_x d$$

$$y = 0,8 \beta_x d$$

$$z_c = d (1 - 0,4 \beta_x)$$

Introduzindo esses valores de y e de z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\begin{cases} 0 = b_w d 0,68 \beta_x f_{cd} - A_s \sigma_s & \text{(1a. equação)} \\ M_{Ed} = b_w d^2 0,68 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) = A_s \sigma_s d (1 - 0,4 \beta_x) & \text{(2a. equação)} \end{cases}$$

Nos casos de verificação são conhecidas as dimensões da seção transversal de concreto (b_w , h , d), a área da seção transversal da armadura tracionada (A_s) e as resistências de cálculo do concreto ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$) e do aço ($f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$). Procura-se o momento resistente de cálculo (M_{rd}) ou o momento máximo (M) que a seção poderá suportar em serviço.

O problema é indeterminado porque são duas equações e três incógnitas: M_{rd} , f_x e σ_s .

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo:

1. Admitte-se $\sigma_s = f_{yd}$ e calcula-se f_x . Da 1ª equação de equilíbrio vem:

$$f_x = \frac{A_s \sigma_s}{b_w d \cdot 0,85 f_{cd}}$$

valor de f_x calculado $\leq f_{yk}$ do aço correspondente, a hipótese está correta ($\sigma_s = f_{yd}$) e o valor de f_x calculado é o valor correto.

3. Se f_x calculado com a hipótese anterior $> f_{yk}$ do aço correspondente, a hipótese está incorreta ($\sigma_s < f_{yd}$) e o valor de f_x deve ser recalculado corrigindo o valor adotado para σ_s . Coloca-se σ_s em função de ϵ_s , f_x e E_s . Corrigida a tensão σ_s , recalcula-se f_x para encontrar o seu valor correto.

– Aços CA-25 e CA-50
(reta de Hooké)

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s$$

com ϵ_s de 5.3.3 e $E_s = 210.000$ MPa

– Aço CA-60

$$\text{Se } f_x < f_{yk} \leq f_{yp} \quad \text{calcula } \sigma_s \text{ pela equação do trecho curvo}$$

$$\text{Se } f_{yp} < f_x < f_{yk} \quad \sigma_s = E_s \epsilon_s \quad \text{(reta de Hooké)}$$

com ϵ_s de 5.3.3 e $E_s = 210.000$ MPa

4. Com o valor correto de f_x a 2ª equação de equilíbrio fornece o momento resistente de cálculo M_{rd} :

$$M_{rd} = b_w d^2 \cdot 0,68 f_x \cdot f_{cd} (1 - 0,4 f_x) = A_s \sigma_s d (1 - 0,4 f_x)$$

5. O momento máximo que a seção poderá suportar em serviço será:
 $M = M_{rd} / \gamma_l$

5.5.2 – Seções retangulares com armadura dupla

Denomina-se seções com armadura dupla aquelas que possuem armaduras tanto no lado tracionado quanto no lado comprimido. Também são denominadas seções com armadura bilateral.

Considere-se uma seção de concreto com forma retangular com armadura tracionada cuja área de seção transversal é A_s e armadura comprimida cuja área da seção transversal é A_s' submetida a um momento fletor M_{sd} que a leve ao estado limite último, como mostra a Figura 5.7. Este momento é denominado momento resistente de cálculo.

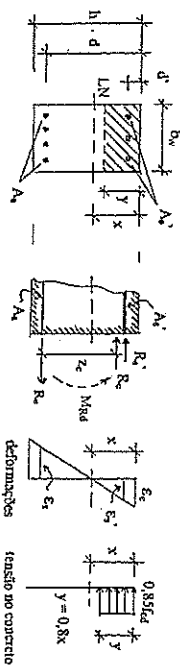


Figura 5.7 – Flexão normal simples de uma viga com seção retangular e com armadura dupla

Considerando a Figura 5.7, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} 0 = R_c + R_s - R_s \\ M_{rd} = R_c \cdot z_c + R_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

onde:

$$\begin{aligned} R_c &= b_w \cdot y \cdot 0,85 f_{cd} \\ R_s &= A_s' \cdot \sigma_s' \\ R_s &= A_s \cdot \sigma_s \\ z_c &= d - y / 2 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{cases} 0 = b_w \cdot y \cdot 0,85 f_{cd} + A_s' \cdot \sigma_s' - A_s \cdot \sigma_s \\ M_{rd} = b_w \cdot y \cdot 0,85 f_{cd} (d - y / 2) + A_s' \cdot \sigma_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

Com $y = 0,8x$ e $x = f_x \cdot d$

resultam:

$$\begin{aligned} y &= 0,8 f_x \cdot d \\ z_c &= d \cdot (1 - 0,4 f_x) \end{aligned}$$

Introduzindo esses valores de y e de z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\begin{cases} 0 = b_w \cdot d \cdot 0,68 f_x \cdot f_{cd} + A_s' \cdot \sigma_s' - A_s \cdot \sigma_s & \text{(1a. equação)} \\ M_{rd} = b_w \cdot d^2 \cdot 0,68 f_x \cdot f_{cd} (1 - 0,4 f_x) + A_s' \cdot \sigma_s' \cdot (d - d') & \text{(2a. equação)} \end{cases}$$

Nos casos de verificação são conhecidas as dimensões da seção transversal de concreto (b_w , h , d), as áreas das seções transversais das armaduras tracionada (A_s) e comprimida (A_s') e as resistências de cálculo do concreto ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$) e do aço ($f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$ e $f_{ycd} = f_{yk} / \gamma_s$). Procura-se o momento resistente de cálculo (M_{rd}) ou o momento máximo (M) que a seção poderá suportar em serviço.

O problema é indeterminado porque são duas equações e quatro incógnitas: M_{rd} , f_x , σ_s e σ_s' .

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo:

Aços CA-25 e CA-50

1. Admitte-se $\sigma_s = f_{yd}$ e $\sigma_s' = f_{ycd}$ e calcula-se f_x . Da 1ª equação de equilíbrio vem:

$$f_x = \frac{A_s \sigma_s - A_s' \sigma_s'}{b_w \cdot d \cdot 0,68 f_{cd}}$$

2. Para que seja $\sigma_s = f_{yd}$ deve-se ter f_x calculado $\leq f_{yk}$ e para que seja $\sigma_s' = f_{ycd}$ deve-se ter f_x calculado $\geq f_{yk}'$ do aço correspondente.

3. Se as duas condições se verificarem ao mesmo tempo as hipóteses estão corretas ($\sigma_s = f_{yd}$ e $\sigma_s' = f_{ycd}$) e o valor de f_x calculado é o valor correto.

4. Se uma das condições não se verificar ou as duas condições não se verificarem, o valor de f_x calculado com as hipóteses anteriores está incorreto e deve ser recalculado corrigindo o valor da tensão correspondente ou os valores das tensões correspondentes. Coloca-se a tensão ou as tensões em função de ϵ_s , ϵ_s' , f_x e E_s . Corrigida a tensão ou tensões, recalcula-se f_x para encontrar o seu valor correto.

– Para A_s' : $\sigma_s' = E_s \epsilon_s'$ (reta de Hooké)
com ϵ_s' de 5.3.3 e $E_s = 210.000$ MPa

– Para A_s : $\sigma_s = E_s \epsilon_s$ (reta de Hooké)
se $f_x > f_{yk}'$ com ϵ_s de 5.3.3 e $E_s = 210.000$ MPa
se $f_x < f_{yk}'$ (reta de Hooké)
com ϵ_s de 5.4.1 ou de 5.4.2 e $E_s = 210.000$ MPa

5. Com o valor correto de f_x a 2° , equação de equilíbrio fornece o momento resistente de cálculo M_{rd} :

$$M_{rd} = b_w \cdot d^2 \cdot 0,85 f_x \cdot f_{cd} (1 - 0,4 f_x) + A_s \cdot \sigma_s' \cdot (d - d')$$

6. O momento máximo que a seção poderá suportar em serviço será:

$$M = M_{rd} / \gamma_f$$

7. No caso de verificação da resistência de uma seção as armaduras já existem. Se na etapa 4 resultar o valor de f_x correto $\leq \eta$, desprezar a armadura de área A_s' supostamente comprimida e recalcular f_x considerando somente a armadura traçada de área A_s .

Apo CA-60

1. Admitte-se $\sigma_s = f_{yd}$ e σ_s' correspondente à reta de Hooke ou ao trecho curvo do diagrama tensão-deformação, colocando σ_s' em função de ϵ_s' , f_x e E_s , e calcula-se f_x . Da 1° equação de equilíbrio vem:

$$f_x = \frac{A_s \cdot \sigma_s - A_s' \cdot \sigma_s'}{b_w \cdot d \cdot 0,85 f_{cd}}$$

2. Para que seja $\sigma_s = f_{yd}$ deve-se ter f_x calculado $\leq f_{xy}$. Para que seja σ_s' na reta de Hooke deve-se ter f_x calculado $\leq f_{xp}$ ou para que seja σ_s' no trecho curvo do diagrama tensão-deformação deve-se ter f_x calculado $\geq f_{xp}$.

3. Se as duas condições correspondentes às hipóteses feitas para σ_s e σ_s' se verificarem ao mesmo tempo as hipóteses estão corretas ($\sigma_s = f_{yd}$ e σ_s' na reta de Hooke ou no trecho curvo, dependendo do que foi admitido) e o valor de f_x calculado é o valor correto.

4. Se uma das condições não se verificar ou as duas condições não se verificarem, o valor de f_x calculado com as hipóteses anteriores está incorreto e deve ser recalculado corrigindo o valor da tensão correspondente ou os valores das tensões correspondentes. Coloca-se a tensão ou as tensões em função de ϵ_s , ϵ_s' , f_x e E_s . Corrigida a tensão ou contidas as tensões, recalcula-se f_x para encontrar o seu valor correto.

-- Para A_s :

$$\sigma_s = \sigma_s \text{ no trecho curvo}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \text{ (reta de Hooke)}$$

$$\text{com } \epsilon_s \text{ de 5,3;3 e } E_s = 210.000 \text{ MPa nas duas últimas situações}$$

-- Para A_s' :

$$\sigma_s' = \sigma_s' \text{ no trecho curvo}$$

$$\sigma_s' = E_s \cdot \epsilon_s' \text{ (reta de Hooke)}$$

$$\text{com } \epsilon_s' \text{ de 5,4;1 ou de 5,4;2 e } E_s = 210.000 \text{ MPa}$$

5. Com o valor correto de f_x a 2° , equação de equilíbrio fornece o momento resistente de cálculo M_{rd} :

$$M_{rd} = b_w \cdot d^2 \cdot 0,85 f_x \cdot f_{cd} (1 - 0,4 f_x) + A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - d')$$

6. O momento máximo que a seção poderá suportar em serviço será:

$$M = M_{rd} / \gamma_f$$

7. No caso de verificação da resistência de uma seção as armaduras já existem. Se na etapa 4 resultar o valor de f_x correto $\leq \eta$, desprezar a armadura de área A_s' supostamente comprimida e recalcular f_x considerando somente a armadura traçada de área A_s .

5.6 – Cálculo de dimensionamento de seções retangulares

Analisar-se-á no cálculo o diagrama retangular de tensões de compressão no concreto.

5.6.1 – Seções retangulares com armadura simples

Denominam-se seções com armadura simples aquelas que possuem armadura somente no lado tracionado. Também são denominadas seções com armadura unilateral.

Considere-se uma seção de concreto com forma retangular e uma armadura traçada cuja área de seção transversal é A_s , submetida a um momento fletor M_{rd} que a leve ao estado último, como mostra a Figura 5.8. Este momento é denominado momento resistente de cálculo.

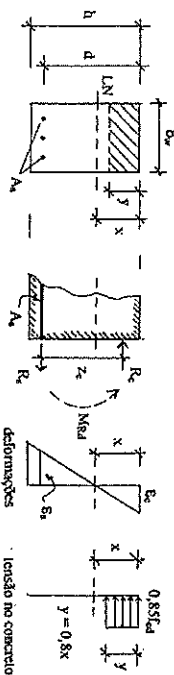


Figura 5.8 – Flexão normal simples de uma viga com seção retangular e com armadura simples

Considerando a Figura 5.8, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} 0 = R_c - R_s \\ M_{rd} = R_c \cdot z_c = R_s \cdot z_c \end{cases}$$

onde:

$$R_c = b_w \cdot y \cdot 0,85 f_{cd}$$

$$R_s = A_s \cdot \sigma_s$$

$$z_c = d - y / 2$$

Então:

$$\begin{cases} 0 = b_w \cdot y \cdot 0,85 f_{cd} - A_s \cdot \sigma_s \\ M_{rd} = b_w \cdot y \cdot 0,85 f_{cd} \cdot (d - y / 2) = A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - y / 2) \end{cases}$$

Com $y = 0,8x$ e $x = f_x \cdot d$

resultam:

$$y = 0,8 f_x \cdot d$$

$$z_c = d \cdot (1 - 0,4 f_x)$$

Introduzindo esses valores de y e de z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\begin{cases} 0 = b_w \cdot d \cdot 0,85 f_x \cdot f_{cd} - A_s \cdot \sigma_s & (1^\circ \text{ equação}) \\ M_{rd} = b_w \cdot d^2 \cdot 0,85 f_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 f_x) = A_s \cdot \sigma_s \cdot d \cdot (1 - 0,4 f_x) & (2^\circ \text{ equação}) \end{cases}$$

O momento fletor decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atuam sobre a peça à qual pertence a seção é M_{sd} . Este momento é denominado momento solitante de cálculo.

Nos casos de dimensionamento faz-se $M_{sd} = M_{rd}$

onde:

M_{sd} = momento solitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo F_d no estado limite último

$M_{sd} = \gamma_f M$ na análise estrutural em regime elástico linear

M = momento solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo em serviço F

Com M_{sd} em lugar de M_{rd} , a primeira forma da 2ª equação de equilíbrio relaciona as dimensões da seção transversal de concreto com o momento solicitante de cálculo M_{sd} :

$$M_{sd} = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \beta_x)$$

Com M_{sd} em lugar de M_{rd} , a segunda forma da 2ª equação de equilíbrio relaciona a área da seção transversal de armadura com o momento solicitante de cálculo M_{sd} :

$$M_{sd} = A_s \sigma_s d \cdot (1 - 0,4 \beta_x)$$

Comentários

1. No dimensionamento das seções de concreto armado submetidas à flexão, a situação mais recomendável é qualquer que satisfaça a condição de ser $0 < \beta_x \leq \beta_{xy}$, isto é, que corresponda aos domínios 2 ou 3 onde ocorre o escoamento da armadura traçãoada.

2. As vantagens da situação recomendada em 1 são as seguintes:

- *ruína com eixo devido ao escoamento do aço e aparecimento de muitas fissuras;*
- *maior economia por aproveitar toda a resistência de escoamento do aço.*

3. Isto significa que o conjunto dos dados deve ser tal que leve a uma situação em que a linha neutra se situe numa posição à qual corresponda $0 < \beta_x \leq \beta_{xy}$ para o aço empregado. Por isso, β_{xy} é o maior valor de β_x aceitável no dimensionamento para que ocorra o escoamento da armadura traçãoada.

4. A ruptura das peças *super-armadas* é brusca e sem aviso, pois o concreto rompe por compressão antes do escoamento da armadura traçãoada. Por isso, esta situação deve ser evitada na flexão simples. Essas peças correspondem ao domínio 4 onde $\beta_{xy} < \beta_x < 1$.

5. Para melhorar a ductilidade das estruturas nas regiões de apoio das vigas ou de ligação com outros elementos estruturais, devem ser obedecidas as seguintes condições:

$$\beta_x \leq 0,50 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\beta_x \leq 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

6. Portanto, para satisfazer a condição recomendada em 3 e a condição exigida em 5, define-se $\beta_{x,lim}$ como o maior valor β_x aceitável para realizar o dimensionamento. Então:

$$\beta_{x,lim} = \beta_{xy} \leq 0,50 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\beta_{x,lim} = \beta_{xy} \leq 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

7. Para os aços da NBR-7480 os valores de $\beta_{x,lim}$ são os seguintes:

Aços CA-25 e CA-50:

$$\beta_{x,lim} = 0,50 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\beta_{x,lim} = 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

Aço CA-60:

$$\beta_{x,lim} = 0,44 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\beta_{x,lim} = 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

8. Se com armadura simples não for possível respeitar a condição de ser $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$, esta solução deve ser rejeitada e as alternativas são as seguintes:

- Se for possível, aumentar pelo menos uma das dimensões da seção de concreto, para modificar a situação, fazendo a nova tentativa de cálculo respeitar aquela condição;
- Na impossibilidade da alternativa anterior, mantendo as dimensões da seção de concreto dada, adotar como solução armadura dupla, como explicado adiante.

a) Cálculo pelo emprego das equações de equilíbrio

1ª CASO: São conhecidos o momento solicitante de cálculo ($M_{sd} = \gamma_1 \cdot M$), as dimensões da seção transversal de concreto (b_w , h , d), a resistência de cálculo do concreto ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$) e a resistência de cálculo do aço ($f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$). Procura-se a área da seção transversal de armadura (A_s).

Este caso possui uma única solução.

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. A primeira forma da 2ª equação de equilíbrio fornece a posição da linha neutra através de β_x . Neste caso só existe uma solução para β_x .
2. Se for $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$, esta solução será aceita.
3. Neste caso, a segunda forma da 2ª equação de equilíbrio ou a 1ª equação de equilíbrio fornece a área da seção transversal de armadura, A_s , com $\sigma_s = f_{yd}$.
4. Se na etapa 1 for $\beta_x > \beta_{x,lim}$, esta solução deverá ser rejeitada.
5. Nesta segunda situação, as soluções são as seguintes:
 - Se for possível, aumentar uma ou as duas dimensões da seção de concreto, para modificar a situação, fazendo prevalecer a primeira, isto é, respeitando $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$;
 - Na impossibilidade da alternativa anterior, mantendo as dimensões da seção transversal de concreto dada, adotar como solução uma armadura dupla, como explicado adiante.

2ª CASO: São conhecidos o momento solicitante de cálculo ($M_{sd} = \gamma_1 \cdot M$), apenas uma das dimensões da seção transversal de concreto (b_w , ou h , d), a resistência de cálculo do concreto ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$) e a resistência de cálculo do aço ($f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$). Procura-se a outra dimensão da seção e a área da seção transversal de armadura (A_s).

Neste caso o problema é indeterminado, pois o número de incógnitas é maior que o número de equações disponíveis.

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Adota-se um valor para $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$, de preferência no intervalo $0,26 \leq \beta_x \leq 0,40$.
2. Conhecido o valor de β_x , a primeira forma da 2ª equação de equilíbrio fornece a dimensão desconhecida da seção de concreto (b_w ou h , d).
3. A segunda forma da 2ª equação de equilíbrio ou a 1ª equação de equilíbrio fornece a área da seção transversal de armadura, A_s , com $\sigma_s = f_{yd}$.

OBSERVAÇÕES:

1. Como orientação para cálculo:
 - $d = h - 4$ cm para barras dispostas em uma camada (para $\phi \leq 20$ mm)
 - $d = h - 5$ cm para barras dispostas em duas camadas (para $\phi \leq 20$ mm)
2. Respeitar a taxa mínima de armadura longitudinal $\rho = A_s / A_c \geq \rho_{min}$ (ver item 5.8)

b) Cálculo com o uso de tabelas

As equações de equilíbrio são as já conhecidas:

$$\begin{cases} 0 = b_w d \cdot 0,68 \beta_x \cdot f_{cd} - A_s \cdot \sigma_s & \text{(1a. equação)} \\ M_{sd} = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \beta_x) = A_s \cdot \sigma_s d \cdot (1 - 0,4 \beta_x) & \text{(2a. equação)} \end{cases}$$

A primeira forma da 2ª equação de equilíbrio pode ser modificada:

$$M_{sd} = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \beta_x)$$

$$M_{sd} = b_w d^2 \cdot [0,68 \beta_x \cdot f_{cd} \cdot \gamma_2] \cdot (1 - 0,4 \beta_x)]$$

Define-se:

$$k_c = 1 / [0,98f_{yk} (f_{ck} / \gamma_c) (1 - 0,4f_{yk})]$$

que pode ser tabelado em função de f_{ck} e f_{yk} .

Então resulta a expressão:

$$M_{sd} = b_w d^2 / k_c$$

que relaciona o momento solitante com as dimensões da seção e a resistência do concreto.

Da segunda forma da 2ª equação de equilíbrio resulta a expressão:

$$A_s = (M_{sd} / d) / [\sigma_s (1 - 0,4f_{yk})]$$

Define-se

$$k_s = 1 / [\sigma_s (1 - 0,4f_{yk})]$$

que pode ser tabelado em função de f_{yk} e de $\sigma_s = f_{yk}$ para cada categoria de aço.

Então resulta a expressão:

$$A_s = k_s (M_{sd} / d)$$

que relaciona a área da seção transversal da armadura com o momento solitante, a altura da seção de concreto e a resistência do aço da armadura.

1º CASO: São conhecidos o momento solitante de cálculo ($M_{sd} = \gamma_l \cdot M$), as dimensões da seção transversal de concreto (b_w , h , d), a resistência de cálculo do concreto ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$) e a resistência de cálculo do aço ($f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$). Procura-se a área da seção transversal de armadura (A_s).

Este caso possui uma única solução. Proceder-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Calcula-se $k_c = b_w d^2 / M_{sd}$.
2. Para o valor de k_c calculado, a tabela dos coeficientes k fornece f_{yk} e k_s .
3. Se for $f_{yk} \leq f_{yk,lim}$, esta solução será aceita.
4. Calcula-se a área da seção transversal de armadura $A_s = k_s (M_{sd} / d)$.
5. Se na etapa 2 for $f_{yk} > f_{yk,lim}$, esta solução deverá ser rejeitada.
6. Nesta segunda situação, as soluções são as seguintes:
 - Se for possível, aumentar uma ou as duas dimensões da seção de concreto, para modificar a situação fazendo prevalecer a primeira, isto é respeitando $f_{yk} \leq f_{yk,lim}$.
 - Na impossibilidade da alternativa anterior, mantendo as dimensões da seção transversal de concreto dada, adotar como solução uma armadura dupla, como explicado adiante.

2º CASO: São conhecidos o momento solitante de cálculo ($M_{sd} = \gamma_l \cdot M$), apenas uma das dimensões da seção transversal de concreto (b_w , ou h , d), a resistência de cálculo do concreto ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$) e a resistência de cálculo do aço ($f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$). Procura-se a outra dimensão da seção e a área da seção transversal de armadura (A_s).

Neste caso o problema é indeterminado, pois o número de incógnitas é maior que o número de equações disponíveis.

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Adota-se um valor para $f_{yk} \leq f_{yk,lim}$, de preferência no intervalo $0,26 \leq f_{yk} \leq 0,40$.
2. Para o valor de f_{yk} adotado, a tabela dos coeficientes k fornece k_c e k_s .
3. Conhecida a largura b_w , obtêm-se $d = (k_c \cdot M_{sd} / b_w)^{1/2}$ e $h = d + 4$ cm ou $h = d + 5$ cm.
4. Conhecida a altura h , obtêm-se $b_w = k_c \cdot M_{sd} / d^2$.
5. Calcula-se a área da seção transversal de armadura $A_s = k_s (M_{sd} / d)$.

OBSERVAÇÕES:

1. Como orientação para cálculo:
 - $d = h - 4$ cm para barras dispostas em uma camada (para $\lambda \leq 20$ mm)
 - $d = h - 5$ cm para barras dispostas em duas camadas (para $\lambda \leq 20$ mm)
2. Respeitar a taxa mínima de armadura longitudinal $\rho = A_s / A_c \geq \rho_{min}$ (Ver item 5.8).

5.5.2 - Seções retangulares com armadura dupla

Denominam-se seções com armadura dupla aquelas que possuem armaduras tanto no lado tracionado quanto no lado comprimido. Também são denominadas seções com armadura bilateral.

Considere-se uma seção de concreto com forma retangular com armadura tracionada cuja área da seção transversal é A_s e armadura comprimida cuja área da seção transversal é A_s' submetida a um momento fletor M_{rd} , como mostra a Figura 5.9. Este momento é denominado momento resistente de cálculo.

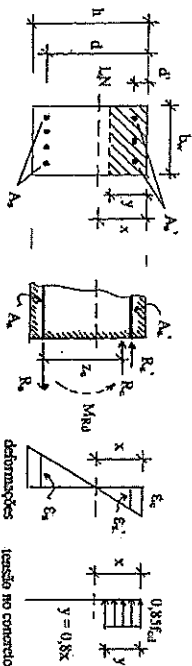


Figura 5.9 – Flexão normal simples de uma viga com seção retangular com armadura dupla

Considerando a Figura 5.9, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} 0 = R_c + R_s' - R_s \\ M_{rd} = R_c \cdot z_c + R_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

O momento fletor decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atua sobre a peça à qual pertence a seção é M_{sd} . Este momento é denominado momento solitante de cálculo.

Nbs casos de dimensionamento faz-se $M_{sd} = M_{rd}$

onde:

M_{sd} = momento solitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo F_d no estado limite último

$M_{sd} = \gamma_l \cdot M$ na análise estrutural em regime elástico linear

M = momento solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo em serviço F

Figura 5.10. Como artifício de cálculo, pode-se admitir a equivalência de situações mostrada na

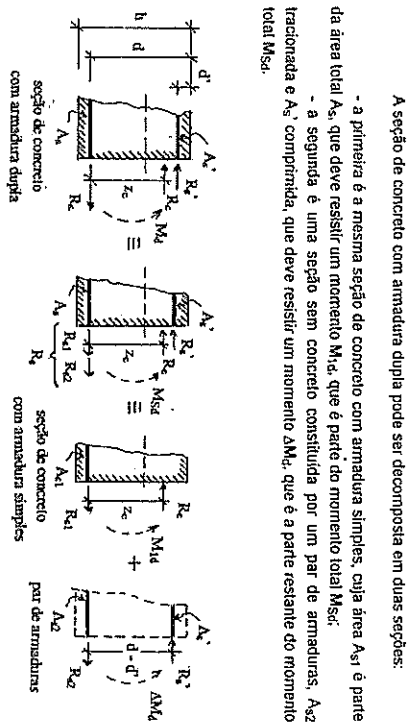


Figura 5.10 – Flexão normal simples de uma viga com seção retangular com armadura dupla

Equilíbrio:
 $M_{sd} = M_{1d} + \Delta M_d$
 $A_s = A_{s1} + A_{s2}$

As equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = R_2 + R_3 - R_5 \\ M_{sd} = R_2 z_c + R_3 (d - d') \end{cases}$$

com:

$$R_3 = R_{s1} + R_{s2}$$

onde:

$$R_{s1} = R_c$$

$$R_{s2} = R_s'$$

e também:

$$M_{sd} = M_{1d} + \Delta M_d$$

onde:

$$M_{1d} = R_c z_c = R_{s1} z_c$$

$$\Delta M_d = R_s' (d - d') = R_{s2} (d - d')$$

As armaduras A_{s1} e A_{s2} são calculadas separadamente para os efeitos de M_{1d} e ΔM_d e somadas no final:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

OBSERVAÇÃO:

A solução com armadura dupla é adotada quando no cálculo da mesma seção com armadura simples resultar $\beta_x > \beta_{x,lim}$.

a) Cálculo pelo emprego direto das equações de equilíbrio
 Proceder-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Adota-se $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$, de preferência no intervalo $0,26 \leq \beta_x \leq \beta_{x,lim}$. A melhor solução é encontrada para $\beta_x = \beta_{x,lim}$ porque leva ao melhor uso do concreto e ao menor consumo de armaduras.

2. Resolve-se a primeira parte do problema:

$$M_{1d} = b_w d^2 0,58 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) \quad \text{com } \beta_x = \beta_x \text{ adotado}$$

$$A_{s1} = M_{1d} / [\sigma_s d (1 - 0,4 \beta_x)] \quad \text{com } \beta_x = \beta_x \text{ adotado}$$

3. Resolve-se a segunda parte do problema:

$$\Delta M_d = M_{sd} - M_{1d}$$

$$A_{s2} = \Delta M_d / [\sigma_s (d - d')] \quad \text{com } \sigma_s = f_{yd}$$

$$A_s' = \Delta M_d / [\sigma_s' (d - d')] \quad \text{com } \sigma_s' \leq f_{yca} \text{ para } \beta_x = \beta_x \text{ adotado}$$

Após CA-25 e CA-50:

- Para $\beta_x < \beta_{sp}'$ será $\sigma_s' = E_s \epsilon_s'$

- Para $\beta_{sp}' \leq \beta_x \leq \beta_{x,lim}$ será $\sigma_s' = f_{ycd}$

Após CA-60:

- Para $\beta_x < \beta_{sp}'$ será $\sigma_s' = E_s \epsilon_s'$

- Para $\beta_{sp}' \leq \beta_x \leq \beta_{lim}$ será $\sigma_s' < f_{ycd}$ no trecho curvo do diagrama $\sigma_s' - \epsilon_s'$

4. As áreas de armadura serão:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

$$A_s = \text{área calculada}$$

5. Respeitar a condição: $A_s + A_s' \leq 0,04 A_c$, onde A_c é a área da seção de concreto.

b) Cálculo com o uso de tabelas

A seção original pode ser decomposta em duas seções, como mostra a Figura 5.11:

- a primeira é a mesma seção de concreto com armadura simples, cuja área A_{s1} é parte da área total A_{s0} , que deve resistir um momento M_{1d} , que é parte do momento total M_{sd} ;

- a segunda é uma seção sem concreto constituída por um par de armaduras, A_{s2} (tracionada e A_{s2}' comprimida, que deve resistir um momento ΔM_d , que é a parte restante do momento total M_{sd}).

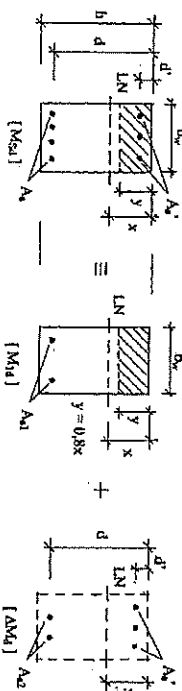


Figura 5.11 – Flexão normal simples de seção retangular com armadura dupla

$$M_{sd} = M_{1d} + \Delta M_d$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

M_{sd} = momento de cálculo resistido pela seção de concreto com armadura dupla
 M_{td} = parte de M_{sd} resistida pelo concreto e pela parte A_{s1} da armadura total A_s
 ΔM_d = parte de M_{sd} resistida pelo par de armaduras A_{s2} e A_{s1}

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Adota-se $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$ de preferência no intervalo $0,25 \leq \beta_x \leq \beta_{x,lim}$. A melhor solução é encontrada para $\beta_x = \beta_{x,lim}$ porque leva ao melhor uso do concreto e ao menor consumo de armaduras.
2. Resolve-se a primeira parte do problema, que trata de uma seção retangular com armadura simples:

$$M_{td} = b_w d^2 / k_e \quad \text{com } \beta_x = \beta_x \text{ adotado}$$

$$A_{s1} = K_s (M_{td} / d) \quad \text{com } \beta_x = \beta_x \text{ adotado}$$
3. Resolve-se a segunda parte do problema:

$$\Delta M_d = M_{sd} - M_{td}$$

O equilíbrio de momentos das resultantes $R_{s2} = A_{s2} \sigma_s$ e $R_s^* = A_s^* \sigma_s^*$ tomado em relação ao centro de gravidade da armadura de área A_s^* fornece:

$$\Delta M_d = R_{s2} (d - d') = A_{s2} \sigma_s (d - d')$$

$$A_{s2} = \Delta M_d / [\sigma_s (d - d')] = (1 / \sigma_s) [\Delta M_d / (d - d')]$$

Define-se: $k_{s2} = 1 / \sigma_s$

que pode ser tabelado em função de β_x e de σ_s (ver para cada categoria de aço.

- Então resulta a expressão: $A_{s2} = k_{s2} [\Delta M_d / (d - d')]$ com k_{s2} para $\beta_x = \beta_x$ adotado

O equilíbrio de momentos das resultantes $R_{s2} = A_{s2} \sigma_s$ e $R_s^* = A_s^* \sigma_s^*$ tomado em relação ao centro de gravidade da armadura de área A_s^* fornece:

$$\Delta M_d = R_s^* (d - d') = A_s^* \sigma_s^* (d - d')$$

$$A_s^* = \Delta M_d / [\sigma_s^* (d - d')] = (1 / \sigma_s^*) [\Delta M_d / (d - d')]$$

- Define-se: $k_{s1} = 1 / \sigma_s^*$
 que pode ser tabelado em função de β_x para cada categoria de aço com σ_s^* conforme 5.4.3 e 5.4.4 e alguns valores de η .

- Então resulta a expressão:

$$A_s^* = k_{s1} [\Delta M_d / (d - d')]$$

com k_{s1} para $\beta_x = \beta_x$ adotado

4. Finalmente:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

A_{s1} = área calculada

5. Respeitar a condição: $A_s + A_s' \leq 0,04 A_c$ onde A_c é a área da seção de concreto.

5.7 – Cálculo de dimensionamento de seções T

Adotar-se-á no cálculo o diagrama retangular de tensões de compressão no concreto.

5.7.1 – Largura colaborante

Nas vigas internas das estruturas de concreto, quando a zona comprimida da seção situa-se no lado da laje, as tensões de compressão distribuem-se além da alma da seção abrangendo

também a laje, como mostra a Figura 5.12. Por isso, pode-se considerar as regiões de laje vizinhas da alma como partes integrantes da seção transversal da viga, resultando uma seção T.

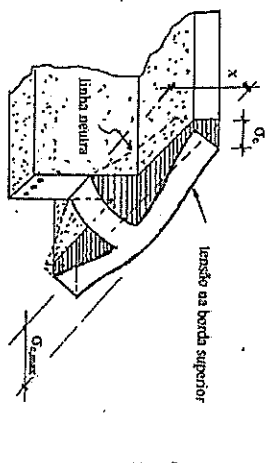


Figura 5.12 – Distribuição real de tensões na zona comprimida das vigas de concreto com seção T. Na seção transversal, a parte vertical é denominada *alma* ou *nervura* e as abas são denominadas *mesa* ou *laje*, como mostra a figura 5.13.

Algumas seções T possuem outros elementos a elas incorporados, como também mostra a Figura 5.13. Denomina-se *talão* a região alargada da alma na parte traseira com finalidade de ampliar o espaço para abrigar as barras da armadura longitudinal quando estas são em grande número. Denomina-se *misula* a região de espessura aumentada da laje onde esta encontra a alma da viga que lhe serve de apoio.

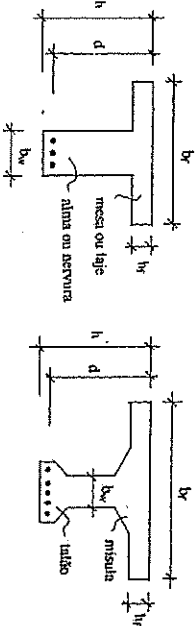


Figura 5.13 – Vigas de concreto com seção T

A seção T submetida à flexão normal simples apresenta, no estado limite último, um bloco de tensões de compressão não prismático, como mostra a Figura 5.12. Por razões de ordem prática, substitui-se esse bloco real de tensões por um bloco ideal prismático, com uma distribuição de tensões constante na largura e semelhante à distribuição real no plano da seção transversal, como mostra a Figura 5.14.

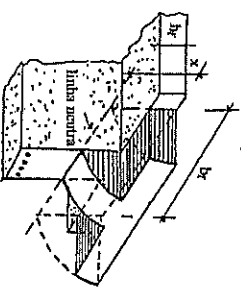


Figura 5.14 – Distribuição ideal de tensões na zona comprimida das vigas de concreto com seção T

Escolhe-se para este bloco de tensões uma largura eficaz b_f tal que seja mantida a resistência de cálculo da seção ao se substituir por este outro o bloco real de tensões.

- A largura b_f é denominada *largura eficaz* ou *largura colaborante* da mesa.
- A largura colaborante b_f não é constante ao longo da viga. Ela depende:
 - do tipo de viga considerada (simplesmente apoiada, contínua, etc.);
 - de serem as cargas distribuídas ou concentradas;
 - da relação entre a altura h_f da mesa e a altura h da alma e
 - da presença eventual de mísulas.

A consideração da seção T pode ser feita para estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos na estrutura de forma mais realista.

A largura b_f é determinada conforme o seguinte critério proposto pela NBR-6118.

A largura b_w designa a largura real da nervura, b_a designa a largura da nervura fictícia obtida aumentando-se a largura real, para cada lado, de valor igual ao do menor cateto do triângulo definido pela mísula correspondente e b_2 designa a distância entre as faces das nervuras reais ou fictícias sucessivas.

Para cálculo da resistência ou deformação, a parte da laje a considerar como elemento da viga medida a partir da face da nervura real ou fictícia é, conforme o caso:

$$b_l \leq \begin{cases} 0,1a \\ 0,5b_2 \end{cases} \quad \text{(vigas associadas)} \quad b_3 \leq \begin{cases} 0,1a \\ b_4 \end{cases} \quad \text{(vigas isoladas)}$$

onde "a" é a distância entre os pontos de momento fletor nulo ao longo da viga em que houver laje colaborante.

A distância "a" pode ser estimada em função do comprimento l do tramo considerado da seguinte forma:

- viga simplesmente apoiada $a = l$
- tramo com momento em uma só extremidade $a = 0,75l$
- tramo com momento nas duas extremidades $a = 0,60l$
- tramo em balanço $a = 2l$

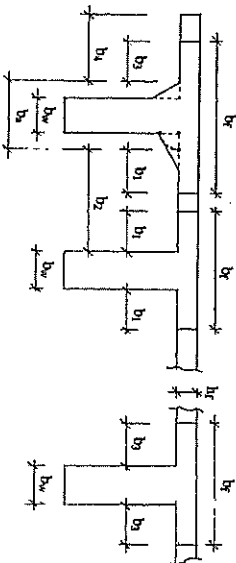


Figura 5.15 – Largura colaborante das vigas com seção T

OBSERVAÇÕES:

1. A colaboração da laje somente poderá ser considerada quando ela estiver no lado comprimido da seção. Somente assim a seção poderá ser tratada como seção T.
2. Quando a laje estiver no lado tração da seção, a sua colaboração não poderá ser considerada. A seção deverá ser tratada como retangular.

5.7.2 – Seções T com armadura simples

1.º CASO: O bloco de tensões de compressão não ultrapassa a altura da mesa.

Então $y \leq h_f$, isto é, $\beta_x \leq \beta_k$.

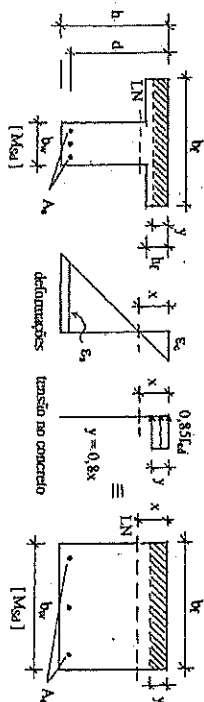


Figura 5.16 – Viga de seção T com a região comprimida de altura menor que a altura da mesa

Considere-se uma seção T com armadura simples, submetida a um momento fletor M_{kd} que a leve ao estado limite último, como mostra a Figura 5.16. O caso em questão é aquele em que o bloco de tensões de compressão na seção não ultrapassa a altura da mesa.

A análise dessa seção se faz como para uma seção retangular com largura fictícia $b_f = b_r$ da mesa e altura h da seção T, pois a forma da região traçãoada não interfere no cálculo.

Vale a hipótese: $y = 0,8x$.

Então:
 $x = y / 0,8 = 1,25y$

Quando $y = h_f$ tem-se $x = 1,25h_f$.

Lembrando que $\beta_x = x / d$, quando $y = h_f$, define-se:

$\beta_l = 1,25h_f / d$

Este 1.º caso acontece quando $y \leq h_f$ e portanto quando $\beta_x \leq \beta_k$.

Para análise de uma seção T nesta situação, vale o que foi apresentado em 5.6.1 para as seções retangulares com armadura simples, usando nas expressões b_r em lugar de b_w , inclusive as tabelas de k_c e k_s para seções retangulares.

Considerando a Figura 5.16, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} 0 = R_c - R_s \\ M_{kd} = R_c z_c = R_s z_s \end{cases}$$

onde:

$$\begin{aligned} R_c &= b_f y \cdot 0,85 f_{cd} \\ R_s &= A_s \sigma_s \\ z_c &= d - y / 2 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{cases} 0 = b_f y \cdot 0,85 f_{cd} - A_s \sigma_s \\ M_{kd} = b_f y \cdot 0,85 f_{cd} (d - y / 2) = A_s \sigma_s (d - y / 2) \end{cases}$$

resultam:

$$\begin{aligned} \text{Com } y = 0,8x \text{ e } x = \beta_x d \\ y &= 0,8 \beta_x d \\ z_c &= d \cdot (1 - 0,4 \beta_x) \end{aligned}$$

Introduzindo esses valores de y e de z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\begin{cases} 0 = b_w d \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} - A_s \sigma_s & (1^a \text{ equação}) \\ M_{sd} = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) = A_s \sigma_s d (1 - 0,4 \beta_x) & (2^a \text{ equação}) \end{cases}$$

O momento fletor decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atuam sobre a peça a qual pertence a seção é M_{sd} . Este momento é denominado momento solitante de cálculo.

onde:

M_{sd} = momento solitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo F_d no estado limite último
 $M_{sd} = \gamma_f M$ na análise estrutural em regime elástico linear
 M = momento solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo em serviço F

Com M_{sd} em lugar de M_{rd} , a primeira forma da 2ª equação de equilíbrio relaciona as dimensões da seção transversal de concreto com o momento solitante de cálculo M_{sd} :

$$M_{sd} = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x)$$

Com M_{sd} em lugar de M_{rd} , a segunda forma da 2ª equação de equilíbrio relaciona a área da seção transversal de armadura com o momento solitante de cálculo M_{sd} :

$$M_{sd} = A_s \sigma_s d (1 - 0,4 \beta_x)$$

2ª CASO: O bloco de tensões de compressão ultrapassa a altura da mesa.
 Então $y > h_f$, isto é, $|x| > \beta_f$.

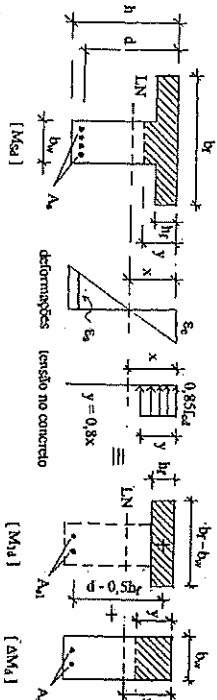


Figura 5.17 – Viga de seção T com a região comprimita de altura maior que a altura da mesa

Quando a altura do bloco de tensões de compressão ultrapassa a altura da laje, é prático empregar o artifício de decompor a seção T em duas outras idealmente concebidas e estender a este caso o raciocínio feito e as tabelas usadas no dimensionamento das seções retangulares.

A seção T com armadura simples pode ser decomposta em duas seções:

- a primeira é constituída pelas abas de concreto com largura $(b_w - b_f)$ e uma armadura cuja área A_{s1} é parte da área total A_s , que deve resistir um momento M_{1d} , que é parte do momento total M_{sd} ;
- a segunda é constituída pela nervura de concreto com armadura simples, cuja área A_{s2} completa a armadura total A_s , que deve resistir um momento ΔM_d , que é a parte restante do momento total M_{sd} .

Então:

$$\begin{cases} M_{sd} = M_{1d} + \Delta M_d \\ A_s = A_{s1} + A_{s2} \end{cases}$$

Considerando a Figura 5.17, para a primeira seção as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = R_{c1} - R_{s1} \\ M_{1d} = R_{c1} z_{c1} = R_{s1} z_{c1} \end{cases}$$

O momento M_{1d} é o mesmo que seria resistido por uma seção T com largura fictícia $(b_w - b_f)$ com a mesa comprimita em toda sua espessura. Esta situação representa o 1º Caso quando $y = h_f$, isto é, quando for $\beta_x = \beta_f$.

Nessas equações:

$$\begin{cases} R_{c1} = (b_w - b_f) h_f \cdot 0,85 f_{cd} \\ R_{s1} = A_{s1} \sigma_s \\ z_{c1} = d - h_f / 2 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} 0 = (b_w - b_f) h_f \cdot 0,85 f_{cd} - A_{s1} \sigma_s \\ M_{1d} = (b_w - b_f) h_f \cdot 0,85 f_{cd} (d - h_f / 2) = A_{s1} \sigma_s (d - h_f / 2) \end{cases}$$

Para cálculo de M_{1d} pode-se considerar a primeira forma da 2ª equação de equilíbrio porque a região comprimita fica bem delimitada pelas abas:

$$M_{1d} = (b_w - b_f) h_f \cdot 0,85 f_{cd} (d - h_f / 2)$$

Como $\beta_f = 1,25 h_f / d$, vem $h_f = 0,8 \beta_f d$

Introduzindo esse valor de h_f naquela equação de equilíbrio vem:

$$M_{1d} = (b_w - b_f) d^2 \cdot 0,68 \beta_f f_{cd} (1 - 0,4 \beta_f)$$

que seria a equação de equilíbrio para uma seção retangular fictícia com largura igual a $(b_w - b_f)$ da seção T quando $y = h_f$, isto é, se β_x para a seção retangular fosse igual a β_f da seção T.

Então:

$$\begin{cases} 0 = (b_w - b_f) d \cdot 0,68 \beta_f f_{cd} - A_{s1} \sigma_s & (1^a \text{ equação}) \\ M_{1d} = (b_w - b_f) d^2 \cdot 0,68 \beta_f f_{cd} (1 - 0,4 \beta_f) = A_{s1} \sigma_s (d - h_f / 2) & (2^a \text{ equação}) \end{cases}$$

A segunda seção é uma seção retangular com armadura simples à qual deve caber a parcela de momento:

$$\Delta M_d = M_{sd} - M_{1d}$$

Considerando a Figura 5.17, para a segunda seção as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = R_{c2} - R_{s2} \\ \Delta M_d = R_{c2} z_{c2} = R_{s2} z_{c2} \end{cases}$$

Nessas equações:

$$\begin{cases} R_{c2} = b_w Y \cdot 0,85 f_{cd} \\ R_{s2} = A_{s2} \sigma_s \\ z_{c2} = d - Y / 2 \end{cases}$$

Aplicando o que foi apresentado em 5.6.1 para as seções retangulares com armadura simples, essas equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = b_w d \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} - A_{s2} \sigma_s & (1^a \text{ equação}) \\ \Delta M_d = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} (d - 0,4 \beta_x) = A_{s2} \sigma_s d (1 - 0,4 \beta_x) & (2^a \text{ equação}) \end{cases}$$

Comentários

1. No dimensionamento das seções T, o primeiro passo é começar pelo 1.º caso. Se resultar $f_x \leq f_l$, então se trata mesmo do 1.º caso e calcula-se a armadura. Se nessa tentativa resultar $f_x > f_l$, conclui-se que se trata do 2.º caso. Então, procede-se como explicado para o 2.º caso.

2. No dimensionamento das seções de concreto à flexão simples deverá ser respeitada a condição de ser $f_x \leq f_{x,lim}$.

$$f_{x,lim} = f_{y'} \leq 0,50 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$
$$f_{x,lim} = f_{y'} \leq 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

3. Para os aços da NBR-7480 os valores de $f_{x,lim}$ são os seguintes:

Aços CA-25 e CA-50:

$$f_{x,lim} = 0,50 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$
$$f_{x,lim} = 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

Aço CA-60:

$$f_{x,lim} = 0,44 \quad \text{para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$$
$$f_{x,lim} = 0,40 \quad \text{para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa}$$

4. Se com armadura simples não for possível respeitar a condição de ser $f_x \leq f_{x,lim}$, esta solução deve ser rejeitada e as alternativas são as seguintes:

- Se for possível, aumentar pelo menos uma das dimensões da seção de concreto, para modificar a situação, fazendo a nova tentativa de cálculo respeitar aquela condição;
- Na impossibilidade da alternativa anterior, mantendo as dimensões da seção de concreto dada, adotar como solução armadura dupla, como explicado adiante.

a) Cálculo pelo emprego direto das equações de equilíbrio

1.º CASO: O bloco de tensões de compressão não ultrapassa a altura da mesa.

$$\text{Então } y \leq h_f, \text{ isto é, } f_x \leq f_l.$$

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. A primeira forma da 2.ª equação de equilíbrio fornece a posição da linha neutra através de f_x .
2. Se for $f_x \leq f_l$, caracterizando o 1.º caso, esta solução será aceita.
3. Então, a segunda forma da 2.ª equação de equilíbrio ou a 1.ª equação de equilíbrio fornece a área da seção transversal de armadura, A_{s1} , com $\sigma_s = f_{yd}$.
4. Se na etapa 1 for $f_x > f_l$, caracterizando o 2.º caso, esta solução deverá ser rejeitada. O passo seguinte é calcular a armadura como explicado na exposição do 2.º caso.
5. Respeitar a taxa mínima de armadura longitudinal $\rho = A_s / A_c \geq \rho_{min}$ (ver item 5.8).

2.º CASO: O bloco de tensões de compressão ultrapassa a altura da mesa.

$$\text{Então } y > h_f, \text{ isto é, } f_x > f_l.$$

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. A parcela de momento M_{1d} a ser resistida pelas abas e pela parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s1} vale:
 $M_{1d} = (b_f - b_w) d^2 0,58 f_{yk} f_{ctd} (1 - 0,4 f_{yk})$

2. A parcela de momento ΔM_d a ser resistida pela alma e a parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s2} vale:

$$\Delta M_d = M_{sd} - M_{1d}$$

3. A primeira forma da 2.ª equação de equilíbrio para a nervura fornece a posição da linha neutra através de f_x . Neste caso só existe uma solução para f_x .

$$\Delta M_d = b_w d^2 0,58 f_{yk} f_{ctd} (1 - 0,4 f_{yk})$$

4. Se for $f_x \leq f_{x,lim}$, esta solução será aceita e a parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s2} vale:

$$A_{s2} = \Delta M_d / [\sigma_{sd} (1 - 0,4 f_{yk})] \quad \text{com } \sigma_s = f_{yd}$$

5. A parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s1} vale:

$$A_{s1} = M_{1d} / [\sigma_{sd} (1 - h_f / Z)] \quad \text{com } \sigma_s = f_{yd}$$

6. Finalmente, a área da seção transversal de armadura da seção T será:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

7. Respeitar a taxa mínima de armadura longitudinal $\rho = A_s / A_c \geq \rho_{min}$ (ver item 5.8).

8. Se com armadura simples não for possível respeitar a condição de ser $f_x \leq f_{x,lim}$, esta solução deve ser rejeitada e o procedimento será aquele indicado no item 4 dos últimos Comentários.

b) Cálculo com o uso de tabelas

1.º CASO: O bloco de tensões de compressão não ultrapassa a altura da mesa.

$$\text{Então } y \leq h_f, \text{ isto é, } f_x \leq f_l.$$

Este caso possui uma única solução.

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Calcula-se $k_c = b_f d^2 / M_{sd}$.
2. Para o valor de k_c calculado, a tabela dos coeficientes K fornece f_x e k_s .
3. Se for $f_x \leq f_l$, caracterizando o 1.º caso, esta solução será aceita.
4. Calcula-se a área da seção transversal de armadura $A_s = k_s (M_{sd} / d)$.
5. Se na etapa 2 for $f_x > f_l$, caracterizando o 2.º caso, esta solução deverá ser rejeitada. O passo seguinte é calcular a armadura como explicado na exposição do 2.º caso.
6. Respeitar a taxa mínima de armadura longitudinal $\rho = A_s / A_c \geq \rho_{min}$ (ver item 5.8).

2.º CASO: O bloco de tensões de compressão ultrapassa a altura da mesa.

$$\text{Então } y > h_f, \text{ isto é, } f_x > f_l.$$

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Considerando a Figura 5.17, a primeira seção da decomposição, para cálculo de M_{1d} , é idêntica a uma seção retangular com largura igual a $(b_f - b_w)$ da seção T quando $y = h_f$, isto é, quando f_x para a seção retangular for igual a f_l da seção T.

2. A parcela de momento M_{1d} a ser resistida pelas abas e pela parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s1} vale:

$$M_{1d} = (b_f - b_w) d^2 / k_c \quad \text{com } k_c \text{ para } f_x = f_l$$

3. A parcela de momento: ΔM_d a ser resistida pela alma e a parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s2} vale:
- $$\Delta M_d = M_{sd} - M_{1d}$$
4. Ainda considerando a Figura 5.17, a segunda seção da decomposição é uma seção retangular com largura igual a b_w da nervura quando y assume seu valor real, isto é, quando β_x para a nervura for igual a β_x da seção T.
5. Então, pode-se calcular para a nervura
- $$k_s = b_w d^2 / \Delta M_d$$
6. Para o valor de k_s calculado, a tabela dos coeficientes k fornece β_x e k_s .
7. Se for $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$, esta situação será aceita e a parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s2} vale:
- $$A_{s2} = k_s (\Delta M_d / d)$$
- com k_s para $\beta_x = \beta_x$ da nervura

8. A parte de armadura cuja área da seção transversal é A_{s1} vale:
- $$A_{s1} = M_{1d} / (c_s (d - 0,5h))$$
- $$A_{s1} = (1 / c_s) [M_{1d} / (d - h / 2)]$$
- com $c_s = \beta_x d$
- (1 / c_s) = k_{s2} definido no estudo das seções retangulares com armadura dupla

- Então:
- $$A_{s1} = k_{s2} [M_{1d} / (d - h / 2)]$$
- com k_{s2} para $\beta_x = \beta_x$ da nervura
9. Finalmente a área da seção transversal da armadura da seção T ser:
- $$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

10. Respeitar a taxa mínima de armadura longitudinal $p = A_s / A_c \geq p_{min}$ (ver item 5.9).
11. Se com armadura simples não for possível respeitar a condição de ser $\beta_x \leq \beta_{x,lim}$, esta solução deve ser rejeitada e o procedimento será aquele indicado no item 4 dos últimos Comentários.

5.7.3 - Seção T com armadura dupla

O problema de dimensionamento de seções T com armadura dupla é resolvido com facilidade empregando-se o artifício de desdobramento da seção T como mostrado na Figura 5.18.

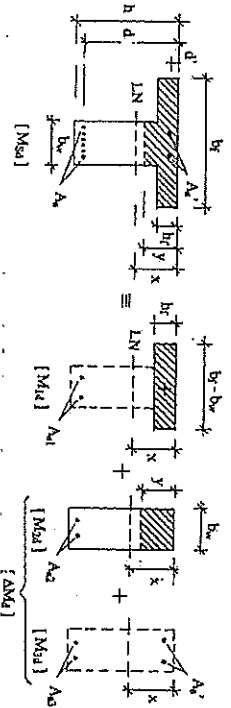


Figura 5.18 - Viga de seção T com armadura dupla.

Considerando a Figura 5.18, a seção T com armadura dupla, que deve resistir o momento solitante de cálculo M_{sd} , pode ser decomposta, em duas etapas, em três seções.

- Na primeira etapa a seção T é decomposta em:
- duas de concreto com largura $(b_r - b_w)$ e uma armadura, cuja área A_{s1} é parte da área total A_s , que deve resistir um momento M_{1d} , que é parte do momento total M_{sd} ;
 - nervura de concreto com armadura dupla que deve resistir um momento ΔM_d , que é a parte restante do momento total M_{sd} .

Na segunda etapa a nervura de concreto com armadura dupla é decomposta em outras duas seções:

- nervura de concreto com armadura simples, cuja área A_{s2} é mais uma parte da armadura total A_s , que deve resistir um momento M_{2d} , que é mais uma parte do momento total M_{sd} ;
- seção sem concreto constituída por um par de armaduras, A_{s3} tracionada e $A_{s'}$ comprimida, que deve resistir um momento M_{3d} , que é a parte restante do momento total M_{sd} .

Então:

$$M_{sd} = M_{1d} + \Delta M_d$$

$$\Delta M_d = M_{2d} + M_{3d}$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} + A_{s3}$$

Considerando a Figura 5.18, para a primeira seção as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = R_{s1} - R_{s1}' \\ M_{1d} = R_{s1} z_{s1} = R_{s1}' z_{s1}' \end{cases}$$

O momento M_{1d} é o mesmo que seria resistido por uma seção T com largura fictícia $(b_r - b_w)$ com a mesa comprimida em toda sua espessura. Esta situação representa o 1°. Caso de seção T com armadura simples quando $y = h_i$, isto é, quando for $\beta_x = \beta_x$.

Nessas equações:

$$R_{s1} = (b_r - b_w) h_i 0,85 f_{cd}$$

$$R_{s1}' = A_{s1} c_s$$

$$z_{s1} = d - h_i / 2$$

Então:

$$\begin{cases} 0 = (b_r - b_w) h_i 0,85 f_{cd} - A_{s1} c_s \\ M_{1d} = (b_r - b_w) h_i 0,85 f_{cd} (d - h_i / 2) = A_{s1} c_s (d - h_i / 2) \end{cases}$$

Como $\beta_x = 1,25 h_i / d$, vem $h_i = 0,8 \beta_x d$

Introduzindo esse valor de h_i nas equações de equilíbrio vem:

$$\begin{cases} 0 = (b_r - b_w) d 0,68 \beta_x f_{cd} - A_{s1} c_s & (1^a \text{ equação}) \\ M_{1d} = (b_r - b_w) d^2 0,68 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) = A_{s1} c_s (d - h_i / 2) & (2^a \text{ equação}) \end{cases}$$

que são as equações de equilíbrio para uma seção retangular com largura igual a $(b_r - b_w)$ da seção T quando $y = h_i$, isto é, quando β_x para a seção retangular for igual a β_x da seção T.

A nervura com armadura dupla deve resistir a parcela de momento:

$$\Delta M_d = M_{2d} - M_{1d}$$

Essa seção é decomposta na nervura com armadura simples, para resistir a parcela M_{2d} do momento ΔM_d , e no par de armaduras, tracionada e comprimida, para resistir a parcela restante M_{3d} , tais que:

$$\Delta M_d = M_{2d} + M_{3d}$$

Considerando novamente a Figura 5.18, para a segunda seção as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = R_{c2} - R_{s2} \\ M_{2d} = R_{c2} z_{c2} = R_{s2} z_{s2} \end{cases}$$

Nessas equações:
 $R_{c2} = b_w y_c / 0,85 f_{cd}$
 $R_{s2} = A_{s2} \sigma_s$
 $z_{c2} = d - y / 2$

Aplicando o que foi apresentado em 5.6.1 para as seções retangulares com armadura simples, essas equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = b_w d^2 0,68 f_{yk} f_{cd} (1 - 0,4 f_{yk}) = A_{s2} \sigma_s d (1 - 0,4 f_{yk}) & (1^a \text{ equação}) \\ M_{2d} = b_w d^2 0,68 f_{yk} f_{cd} (1 - 0,4 f_{yk}) = A_{s2} \sigma_s d (1 - 0,4 f_{yk}) & (2^a \text{ equação}) \end{cases}$$

Considerando novamente a Figura 5.18, para a terceira seção as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = R_{c3} - R_{s3} \\ M_{3d} = R_{c3} (d - d') = R_{s3} (d - d') \end{cases}$$

Nessas equações:
 $R_{c3} = A_{s3} \sigma_s$
 $R_{s3} = A_{s3} \sigma_s$

Aplicando o que foi apresentado em 5.6.1 para as seções retangulares com armadura simples, essas equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} 0 = A_{s3} \sigma_s - A_{s3} \sigma_s & (1^a \text{ equação}) \\ M_{3d} = A_{s3} \sigma_s (d - d') = A_{s3} \sigma_s (d - d') & (2^a \text{ equação}) \end{cases}$$

As armaduras A_{s1} , A_{s2} e A_{s3} são calculadas separadamente para os eixos de M_{1d} , M_{2d} e M_{3d} e somadas no final:
 $A_s = A_{s1} + A_{s2} + A_{s3}$

OBSERVAÇÃO:

A solução com armadura dupla é adotada quando no cálculo da mesma seção de concreto com armadura simples resultar $f_{yk} > f_{yk,lim}$.

a) Cálculo pelo emprego direto das equações de equilíbrio

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Adota-se $f_{yk} \leq f_{yk,lim}$ de preferência no intervalo $0,28 \leq f_{yk} \leq f_{yk,lim}$. A melhor solução é encontrada para $f_{yk} = f_{yk,lim}$ porque leva ao melhor uso do concreto e ao menor consumo de armaduras.
2. Resolve-se a primeira parte do problema:
 $M_{1d} = (b_r - b_w) d^2 0,68 f_{yk} f_{cd} (1 - 0,4 f_{yk})$ com $\sigma_s = f_{yk}$
 $A_{s1} = M_{1d} / [\sigma_s (d - 1,7 d / 2)]$ com $\sigma_s = f_{yk}$
3. Resolve-se a segunda parte do problema:
 $M_{2d} = b_w d^2 0,68 f_{yk} f_{cd} (1 - 0,4 f_{yk})$ com $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
 $A_{s2} = M_{2d} / [\sigma_s d (1 - 0,4 f_{yk})]$ com $f_{yk} = f_{yk,adotado}$ e $\sigma_s = f_{yk}$
4. Resolve-se a terceira parte do problema:
 $M_{3d} = M_{3d} - M_{1d} - M_{2d}$ com $\sigma_s = f_{yk}$
 $A_{s3} = M_{3d} / [\sigma_s (d - d')]$ com $\sigma_s \leq f_{yk}$ para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
 $A_{s3} = M_{3d} / [\sigma_s (d - d')]$ com $\sigma_s \leq f_{yk}$ para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$

- Açós CA-25 e CA-50:
- Para $f_{yk} < f_{yk'}$
- Para $f_{yk'} \leq f_{yk} \leq f_{yk,lim}$

- Para $f_{yk} < f_{yk'}$
- Para $f_{yk'} \leq f_{yk} \leq f_{yk,lim}$

- Para $f_{yk} < f_{yk'}$
- Para $f_{yk'} \leq f_{yk} \leq f_{yk,lim}$

5. Respeitar a condição: $A_s + A_s' \leq A_c$ onde A_c é a área da seção de concreto considerando apenas a alma da seção.

b) Cálculo com o uso de tabelas

Procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. Adota-se $f_{yk} \leq f_{yk,lim}$ de preferência no intervalo $0,28 \leq f_{yk} \leq f_{yk,lim}$. A melhor solução é encontrada para $f_{yk} = f_{yk,lim}$ porque leva ao melhor uso do concreto e ao menor consumo de armaduras.
2. Resolve-se a primeira parte do problema:
 $M_{1d} = (b_r - b_w) d^2 / k_1$ com k_1 para $f_{yk} = f_{yk}$
 $A_{s1} = k_2 [M_{1d} / (d - 1,7 d / 2)]$ com k_2 para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
3. Resolve-se a segunda parte do problema:
 $M_{2d} = b_w d^2 / k_3$ com k_3 para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
 $A_{s2} = k_3 (M_{2d} / d)$ com k_3 para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
4. Resolve-se a terceira parte do problema:
 $M_{3d} = M_{3d} - M_{1d} - M_{2d}$ com k_4 para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
 $A_{s3} = k_4 [M_{3d} / (d - d')]$ com k_4 para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
 $A_{s3} = k_5 [M_{3d} / (d - d')]$ com k_5 para $f_{yk} = f_{yk,adotado}$
5. As áreas de armadura serão:
 $A_s = A_{s1} + A_{s2} + A_{s3}$
 $A_s =$ área calculada
6. Respeitar a condição: $A_s + A_s' \leq A_c$ onde A_c é a área da seção de concreto considerando apenas a alma da seção.

5.8 – Armaduras mínimas em vigas

Deve-se evitar, sempre que possível, o dimensionamento em situação que corresponda a valores de f_{yk} muito baixos. Por exemplo, no domínio 2, em geral para $f_{yk} < 0,15$. Isto se justifica porque nessa situação resta uma quantidade pequena de armadura traçoadada que leva a uma ruptura frágil. Para evitar que isso aconteça, é preciso que a taxa de armadura longitudinal ρ seja maior ou igual a uma taxa mínima para essa armadura.

A área da seção transversal da armadura longitudinal de tração não deve ser inferior àquela com a qual o momento de ruptura da seção calculado sem se considerar a resistência do concreto à tração seja igual ao momento de ruptura da seção sem armadura.

A taxa de armadura longitudinal de tração deve ser $\rho = A_s / A_c \geq \rho_{\min}$.

Seção retangular	$\rho_{\min} = 0,035 \cdot f_{cd} / f_{yd} \geq 0,0015$
Seção T com mesa comprimida	$\rho_{\min} = 0,024 \cdot f_{cd} / f_{yd} \geq 0,0015$
Seção T com mesa traçãoada	$\rho_{\min} = 0,031 \cdot f_{cd} / f_{yd} \geq 0,0015$

A_s = área da seção transversal da armadura longitudinal traçãoada.

Nas seções retangulares e T com mesa traçãoada a área A_c corresponde à alma. Nas seções T com mesa comprimida a área A_c inclui a área da mesa colaborante.

5.9 – Cobrimento das armaduras

O cobrimento das armaduras é sempre referido à superfície da armadura externa, em geral à face externa dos esboços.

Para garantir o cobrimento mínimo (c_{\min}), o perfil e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc).

O cobrimento das armaduras das vigas e lajes deve respeitar o cobrimento nominal indicado na Tabela 3.3 do Item 3.3.2 deste texto.

6 – FLEXÃO NORMAL COMPOSTA – FORÇA NORMAL COMPRESSÃO

6.1 - Introdução

Flexão normal é aquela em que o plano de flexão contém um dos eixos principais de inércia da seção transversal.

Flexão composta é o caso de solicitação normal em que atuam simultaneamente momento fletor (M) e força normal (N).

Os esforços são referidos convencionalmente ao CG da seção de concreto. A força normal N de compressão é considerada positiva. O momento fletor M é considerado sempre positivo.

Nas estruturas de concreto a flexão normal composta com força normal de compressão ocorre principalmente nos pilares. Ocorre também nas travess dos pórticos, quando existe ação horizontal além da vertical, e nos muros de arrimo e paredes feitas de concreto, desde que além das ações horizontais existam ações verticais.

A Figura 6.1 apresenta uma seção retangular de concreto com armaduras cujas áreas de seção transversal são A_s e A_s' , submetida a um momento fletor M_{Nd} e uma força normal de compressão N_{Nd} , e mostra as situações que podem decorrer da interação de momento fletor e força normal. Este é o par de esforços que esgota a resistência da seção.

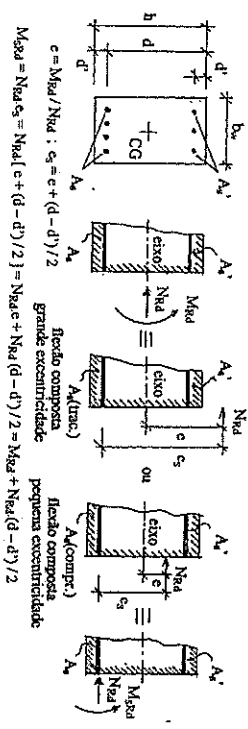


Figura 6.1 – Flexão normal composta de uma barra com seção retangular

6.2 – Flexão normal composta com grande excentricidade

Flexão normal composta com grande excentricidade é aquela em que a linha neutra corta a seção transversal estando uma das armaduras traçãoada.

A_s = área da seção transversal da armadura traçãoada

A_s' = área da seção transversal da armadura comprimida

Ocorre nos domínios 2, 3 e 4 de deformações. Por isso, $0 < x < d$ e d_{a1} , $0 < \beta_x < 1$.

Valem as definições vistas na flexão normal simples:

$\beta_x = x / d$

$\eta = d' / d$

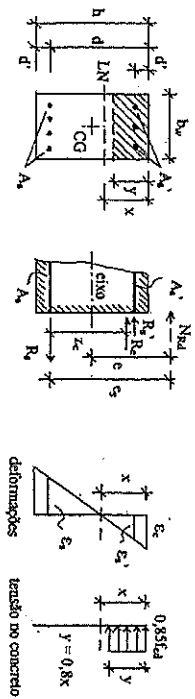


Figura 6.2 – Flexão normal composta com grande excentricidade

Considerando uma seção retangular de concreto submetida à flexão normal composta com grande excentricidade, como mostra a Figura 6.2, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} N_{sd} = R_c + R_s' - R_s \\ M_{sd} e_s = R_c z_c + R_s' (d - d') \end{cases}$$

onde as notações são as mesmas adotadas na flexão normal simples.

Nessas equações:

$$R_c = b_w y \cdot 0,85 f_{cd}$$

$$R_s' = A_s' \sigma_s'$$

$$R_s = A_s \sigma_s$$

$$z_c = d - y/2$$

Então:

$$N_{sd} = b_w y \cdot 0,85 f_{cd} + A_s' \sigma_s' - A_s \sigma_s$$

$$M_{sd} e_s = b_w y \cdot 0,85 f_{cd} (d - y/2) + A_s' \sigma_s' (d - d')$$

resultam:

$$y = 0,8 \beta_x d$$

$$z_c = d (1 - 0,4 \beta_x)$$

Introduzindo esses valores de y e z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$N_{sd} = b_w d \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} + A_s' \sigma_s' - A_s \sigma_s$$

$$M_{sd} e_s = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) + A_s' \sigma_s' (d - d')$$

A força normal decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atua sobre a peça à qual pertence a seção é N_{sd}. Esta força normal é denominada força normal solitante de cálculo.

Nos casos de dimensionamento faz-se N_{sd} = N_{sd}

onde:

$$N_{sd} = \gamma_s N$$

N = força normal solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo F em serviço

Com N_{sd} em lugar de N_{sd}, as equações de equilíbrio ficam:

$$N_{sd} = b_w d \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} + A_s' \sigma_s' - A_s \sigma_s$$

$$M_{sd} e_s = b_w d^2 \cdot 0,68 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) + A_s' \sigma_s' (d - d')$$

Essas equações podem ser colocadas na forma adimensional.

Dividindo-se os dois membros da 1ª equação pelo produto b_wd f_{cd} e os dois membros da 2ª equação pelo produto b_wd² f_{cd}, resultam as equações na forma adimensional:

$$\begin{cases} \frac{N_{sd}}{b_w d f_{cd}} = 0,68 \beta_x + \frac{A_s' \sigma_s'}{b_w d f_{cd}} - \frac{A_s \sigma_s}{b_w d f_{cd}} \\ \frac{M_{sd} e_s}{b_w d^2 f_{cd}} = 0,68 \beta_x (1 - 0,4 \beta_x) + \frac{A_s' \sigma_s' (d - d')}{b_w d f_{cd} d} \end{cases}$$

Nessas expressões:

$$\eta d = \frac{N_{sd}}{b_w d f_{cd}} = \text{força normal reduzida ou força normal relativa}$$

$$\mu d = \frac{M_{sd} e_s}{b_w d^2 f_{cd}} = \text{momento reduzido ou momento relativo}$$

$$\begin{cases} \omega = 0,68 \beta_x & \text{tabelado em função de } \beta_x \\ \mu = 0,68 \beta_x (1 - 0,4 \beta_x) & \text{tabelado em função de } \beta_x \end{cases}$$

Define-se:

$$\omega d = \frac{A_s}{b_w d} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = \text{taxa mecânica de armadura referente à armadura } A_s$$

$$\omega d' = \frac{A_s'}{b_w d} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = \text{taxa mecânica de armadura referente à armadura } A_s'$$

$$\eta = d' / d$$

Das definições das taxas mecânicas de armadura resultam:

$$\omega d = \frac{\sigma_s}{f_{cd}} \frac{A_s}{b_w d}$$

$$\omega d' = \frac{\sigma_s'}{f_{cd}} \frac{A_s'}{b_w d}$$

Então, no caso de armadura dupla, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} \eta d = \omega + \omega d' - \frac{\sigma_s'}{f_{cd}} - \frac{\sigma_s}{f_{cd}} \\ \mu d = \mu + \omega d' \frac{d - d'}{d} \cdot (1 - \eta) \end{cases}$$

No caso de armadura simples:

$$A_s' = 0 \text{ e portanto } R_s' = 0 \text{ nas duas equações de equilíbrio. Por isso será } \omega_d' = \omega_s' = 0.$$

Então, no caso de armadura simples, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} V_d = \omega - \omega_d' \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \\ N_{dEd} = N \end{cases}$$

As relações σ_s / f_{yd} e σ_s' / f_{yEd} são tabeladas em função de β_x para cada apo.

6.2.1 – Dimensionamento de seções retangulares com armadura simples

1. Calculam-se $V_d = N_{sd} / (b_w \cdot d \cdot f_{cd})$ e $N_{dEd} = (N_{sd} \cdot e_s) / (b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd})$ com $e = M_{sd} / N_{sd}$ e $e_s = e + (d - d') / 2$.
2. Para o valor de μ da tabela igual ao valor de N_{dEd} calculado a tabela fornece β_{x1} e ω .
3. Adota-se $\beta_x = \beta_{x1}$ e da 1ª equação de equilíbrio vem $\omega_d' (\sigma_s' / f_{yEd}) = (\mu - \omega) - V_d$.
4. Para $\beta_x = \beta_{x1}$ a tabela dos apo fornece σ_s / f_{yd} .
5. Então $\omega_d = (\omega - V_d) / (\sigma_s / f_{yd})$.
6. Daí vem $A_s = \omega_d \cdot b_w \cdot d \cdot (f_{cd} / f_{yd})$.

6.2.2 – Dimensionamento de seções retangulares com armadura dupla

1. Calculam-se $V_d = N_{sd} / (b_w \cdot d \cdot f_{cd})$ e $N_{dEd} = (N_{sd} \cdot e_s) / (b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd})$ com $e = M_{sd} / N_{sd}$ e $e_s = e + (d - d') / 2$.
2. Adota-se um valor para $\beta_x \neq \beta_{x1}$ e a tabela fornece μ e ω .
3. Da 2ª equação de equilíbrio vem $\omega_d' (\sigma_s' / f_{yEd}) = (\mu - \omega) / (1 - \eta)$.
4. Para o valor de β_x adotado a tabela dos apo fornece σ_s' / f_{yEd} .
5. Então $\omega_d' = [(\mu - \omega) / (1 - \eta)] / (\sigma_s' / f_{yEd})$.
6. Daí vem $A_s' = \omega_d' \cdot b_w \cdot d \cdot (f_{cd} / f_{yEd})$.
7. Da 1ª equação de equilíbrio vem $\omega_d (\sigma_s / f_{yEd}) = \omega + \omega_d' (\sigma_s' / f_{yEd}) - V_d$.
8. Para o valor de β_x adotado a tabela dos apo fornece σ_s / f_{yEd} .
9. Então $\omega_d = [\omega + \omega_d' (\sigma_s' / f_{yEd}) - V_d] / (\sigma_s / f_{yEd})$.
10. Daí vem $A_s = \omega_d \cdot b_w \cdot d \cdot (f_{cd} / f_{yEd})$.

6.3 – Flexão normal composta com pequena excentricidade

Flexão normal composta com pequena excentricidade é aquela em que a linha neutra corta a seção transversal estando as armaduras comprimidas e parte da seção de concreto tracionada.

A_s = área da seção transversal da armadura mais comprimida
 A_s' = área da seção transversal da armadura mais comprimida

Ocorre no domínio 4a de deformações. Por isso, $d \leq x \leq h$ e daí, $1 \leq \beta_x \leq (1 + \eta)$.

Valem as definições vistas na flexão normal composta com grande excentricidade:

$$\beta_x = x / d$$

$$\eta = d' / d$$

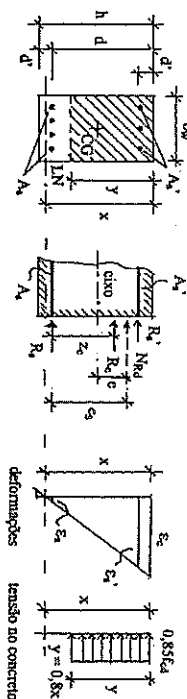


Figura 6.3 – Flexão normal composta com pequena excentricidade

Considerando uma seção retangular de concreto submetida à flexão normal composta com pequena excentricidade, como mostra a Figura 6.3, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} N_{dEd} = R_c + R_s' + R_s \\ N_{dEd} e_s = R_c \cdot z_c + R_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

onde as notações são as mesmas adotadas na flexão normal composta com grande excentricidade.

Nessas equações:

$$R_c = b_w \cdot y \cdot 0,85 \cdot f_{cd}$$

$$R_s' = A_s' \cdot \sigma_s'$$

$$R_s = A_s \cdot \sigma_s$$

$$z_c = d - y / 2$$

Então:

$$N_{dEd} = b_w \cdot y \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s' \cdot \sigma_s' + A_s \cdot \sigma_s$$

$$N_{dEd} e_s = b_w \cdot y \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - y / 2) + A_s' \cdot \sigma_s' \cdot (d - d')$$

Com $y = 0,8 \cdot x$ e $x = \beta_x \cdot d$

$$y = 0,8 \cdot \beta_x \cdot d$$

$$z_c = d \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x)$$

$$N_{dEd} e_s = b_w \cdot d^2 \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + A_s' \cdot \sigma_s' \cdot (d - d')$$

introduzindo esses valores de y e z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\begin{cases} N_{dEd} = b_w \cdot d \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} + A_s' \cdot \sigma_s' + A_s \cdot \sigma_s \\ N_{dEd} e_s = b_w \cdot d^2 \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + A_s' \cdot \sigma_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

A força normal decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atuam sobre a peça à qual pertence a seção é N_{sd} . Esta força normal é denominada força normal solitante de cálculo.

Nos casos de dimensionamento faz-se $N_{sd} = N_{Ed}$

N_{sd} = força normal solitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo F_d no estado limite último

$N_{sd} = \gamma_r \cdot N$

N = força normal solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo F_d em serviço

Com N_{sd} em lugar de N_{Ed} , as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} N_{sd} = b_w \cdot d \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} + A_s' \cdot \sigma_s' + A_s \cdot \sigma_s \\ N_{sd} e_s = b_w \cdot d^2 \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + A_s' \cdot \sigma_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

onde:

N_{sd} = força normal solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo F_d em serviço

N = força normal solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo F_d em serviço

Com N_{sd} em lugar de N_{Ed} , as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} N_{sd} = b_w \cdot d \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} + A_s' \cdot \sigma_s' + A_s \cdot \sigma_s \\ N_{sd} e_s = b_w \cdot d^2 \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + A_s' \cdot \sigma_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

Essas equações podem ser colocadas na forma adimensional como foi feito na flexão normal composta com grande excentricidade.

Dividindo-se os dois membros da 1ª equação pelo produto $b_w \cdot d \cdot f_{cd}$ e os dois membros da 2ª equação pelo produto $b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}$, resultam as equações na forma adimensional:

$$\begin{cases} N_{sd} &= 0,68 \cdot \beta_x + \frac{A_s' \cdot \sigma_s'}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} + \frac{A_s \cdot \sigma_s}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} \\ N_{sd} \cdot e_s &= 0,68 \cdot \beta_x \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + \frac{A_s' \cdot \sigma_s' \cdot d - d'}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} \end{cases}$$

Aplicam-se aqui as mesmas definições vistas em 6.2.

Então, no caso de armadura dupla, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} V_d = \omega + \omega_d' \cdot \frac{\sigma_s'}{f_{ytd}} + \omega_d \cdot \frac{\sigma_s}{f_{ytd}} \\ H_d = \mu + \omega_d' \cdot \frac{\sigma_s'}{f_{ytd}} \cdot (1 - \eta) \end{cases}$$

No caso de armadura simples:

$$A_s' = 0 \text{ e portanto } R_s' = 0 \text{ nas duas equações de equilíbrio. Por isso será } \omega_d' \cdot \frac{\sigma_s'}{f_{ytd}} = 0.$$

Então, no caso de armadura simples, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} V_d = \omega + \omega_d \cdot \frac{\sigma_s}{f_{ytd}} \\ H_d = \mu \end{cases}$$

As relações σ_s / f_{ytd} e σ_s' / f_{ytd} são tabeladas em função de β_x para cada aço.

Como se percebe, as equações de equilíbrio mantêm as mesmas formas daquelas encontradas na flexão normal composta com grande excentricidade. A única diferença é a troca do sinal (-) pelo sinal (+) no termo $\omega_d \cdot (\sigma_s / f_{ytd})$ na 1ª equação de equilíbrio.

6.3.1 - Dimensionamento de seções retangulares com armadura simples

1. Calculam-se $V_d = N_{sd} / (b_w \cdot d \cdot f_{cd})$ e $H_d = (N_{sd} \cdot e_s) / (b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd})$ com $e = M_{sd} / N_{sd}$ e $e_s = e + (d - d') / 2$.
2. Para o valor de μ da tabela igual ao valor de H_d calculado a tabela fornece β_x e ω .
3. Adotase $\beta_x = \beta_{x1}$ e da 1ª equação de equilíbrio vem $\omega_d \cdot (\sigma_s / f_{ytd}) = V_d - \omega$.
4. Para $\beta_x = \beta_{x1}$ a tabela dos aços fornece σ_s / f_{ytd} .
5. Então $\omega_d = (V_d - \omega) / (\sigma_s / f_{ytd})$.
6. Dai vem $A_s = \omega_d \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd} / f_{ytd}$.

6.3.2 - Dimensionamento de seções retangulares com armadura dupla

1. Calculam-se $V_d = N_{sd} / (b_w \cdot d \cdot f_{cd})$ e $H_d = (N_{sd} \cdot e_s) / (b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd})$ com $e = M_{sd} / N_{sd}$ e $e_s = e + (d - d') / 2$.
2. Adota-se um valor para $\beta_x \neq \beta_{x1}$ e a tabela fornece μ e ω .
3. Da 2ª equação de equilíbrio vem $\omega_d' \cdot (\sigma_s' / f_{ytd}) = (H_d - \mu) / (1 - \eta)$.
4. Para o valor de β_x adotado a tabela dos aços fornece σ_s' / f_{ytd} .
5. Então $\omega_d' = [(H_d - \mu) / (1 - \eta)] / (\sigma_s' / f_{ytd})$.
6. Dai vem $A_s' = \omega_d' \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd} / f_{ytd}$.
7. Da 1ª equação de equilíbrio vem $\omega_d \cdot (\sigma_s / f_{ytd}) = V_d - \omega - \omega_d' \cdot (\sigma_s' / f_{ytd})$.
8. Para o valor de β_x adotado a tabela dos aços fornece σ_s / f_{ytd} .
9. Então $\omega_d = [V_d - \omega - \omega_d' \cdot (\sigma_s' / f_{ytd})] / (\sigma_s / f_{ytd})$.
10. Dai vem $A_s = \omega_d \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd} / f_{ytd}$.

6.4 - Compressão não uniforme

Compressão não uniforme é a flexão composta em que a linha neutra é externa à seção transversal da peça estando toda a seção comprimida, inclusive as armaduras.

A_s = área da seção transversal da armadura mais comprimida

Ocorre no domínio 5 de deformações. Por isso, $h < X < h_{ox}$ e daí, $(1 + \eta) < \beta_x < h_{ox}$. Valem as definições vistas na flexão normal composta com grande excentricidade:

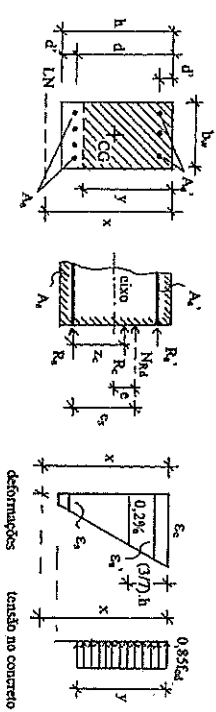


Figura 6.4 - Compressão não uniforme

Considerando uma seção retangular de concreto submetida à compressão não uniforme, como mostra a Figura 6.4, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} N_{hd} = R_c + R_s' + R_s \\ N_{hd} \cdot e_s = R_c \cdot z_c + R_s' \cdot (d - d') \end{cases}$$

onde as notações são as mesmas adotadas na flexão normal composta com grande excentricidade.

1º CASO: $h < x \leq 1,25h$, isto é, $(1 + \eta) < \beta_x \leq 1,25(1 + \eta)$

Nesse caso vale a hipótese de ser $y = 0,8x$ porque $y \leq h$.

Nas equações de equilíbrio:

$$R_c = b_w y 0,85 f_{cd}$$

$$R_s' = A_s' \sigma_s'$$

$$R_s = A_s \sigma_s$$

$$z_c = d - y / 2$$

Então:

$$\begin{cases} N_{rd} = b_w y 0,85 f_{cd} + A_s' \sigma_s' + A_s \sigma_s \\ N_{rd} e_s = b_w y 0,85 f_{cd} (d - y / 2) + A_s' \sigma_s' (d - d') \end{cases}$$

Com $y = 0,8x$ e $x = \beta_x d$ resultam:

$$\begin{cases} y = 0,8 \beta_x d \\ z_c = d(1 - 0,4 \beta_x) \end{cases}$$

Introduzindo esses valores de y e z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\begin{cases} N_{rd} = b_w d 0,68 \beta_x f_{cd} + A_s' \sigma_s' + A_s \sigma_s \\ N_{rd} e_s = b_w d^2 0,568 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) + A_s' \sigma_s' (d - d') \end{cases}$$

A força normal decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atuam sobre a peça à qual pertence a seção é N_{sd} . Esta força normal é denominada força normal solitante de cálculo.

onde:

N_{sd} = força normal solitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo F_d no estado limite último

$$N_{sd} = \gamma_f N$$

N = força normal solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo F em serviço

Com N_{sd} em lugar de N_{rd} , as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} N_{sd} = b_w d 0,68 \beta_x f_{cd} + A_s' \sigma_s' + A_s \sigma_s \\ N_{sd} e_s = b_w d^2 0,568 \beta_x f_{cd} (1 - 0,4 \beta_x) + A_s' \sigma_s' (d - d') \end{cases}$$

Essas equações podem ser colocadas na forma adimensional como foi feito na flexão normal composta com grande excentricidade.

Dividindo-se os dois membros da 1ª equação pelo produto $b_w d f_{cd}$ e os dois membros da 2ª equação pelo produto $b_w d^2 f_{cd}$, resultam as equações na forma adimensional:

$$\begin{cases} N_{sd} = 0,68 \beta_x + \frac{A_s' \sigma_s'}{b_w d f_{cd}} + \frac{A_s \sigma_s}{b_w d f_{cd}} \\ N_{sd} e_s = 0,568 \beta_x (1 - 0,4 \beta_x) + \frac{A_s' \sigma_s' (d - d')}{b_w d^2 f_{cd}} \end{cases}$$

Aplicam-se aqui as mesmas definições vistas em 6.2

$$\begin{cases} \omega = 0,68 \beta_x \\ \mu = 0,568 \beta_x (1 - 0,4 \beta_x) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{tabelado em função de } \beta_x \\ \text{tabelado em função de } \beta_x \end{matrix}$$

Então, no caso de armadura dupla, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} V_d = \omega + \omega d' \frac{\sigma_s'}{f_{cd}} + \omega d \frac{\sigma_s}{f_{cd}} \\ N_{sd} = \mu + \omega d' \frac{\sigma_s'}{f_{cd}} (1 - \eta) \end{cases}$$

Não se usa armadura simples para este caso.

As equações de equilíbrio mantêm as mesmas formas daquelas encontradas na flexão normal composta com pequena excentricidade sem qualquer alteração.

2º CASO: $1,25h < x < \infty$, isto é, $1,25(1 + \eta) < \beta_x < \infty$

Nesse caso não vale mais a hipótese de ser $y = 0,8x$ porque resultaria $y > h$, o que correspondia a uma distribuição de tensões de compressão no concreto com altura y maior que a altura total da seção. Isto é impossível.

Então, nesse caso $y = h$, constante, independentemente da posição da linha neutra dada por $1,25(1 + \eta) < \beta_x < \infty$. A altura disponível h da seção transversal de concreto foi esgotada.

As equações de equilíbrio continuam sendo:

$$\begin{cases} N_{rd} = R_c + R_s' + R_s \\ N_{rd} e_s = R_c z_c + R_s' (d - d') \end{cases}$$

Nessas equações:

$$R_c = b_w h 0,85 f_{cd}$$

$$R_s' = A_s' \sigma_s'$$

$$R_s = A_s \sigma_s$$

$$z_c = d - h / 2$$

Então:

$$\begin{cases} N_{rd} = b_w h 0,85 f_{cd} + A_s' \sigma_s' + A_s \sigma_s \\ N_{rd} e_s = b_w h 0,85 f_{cd} (d - h / 2) + A_s' \sigma_s' (d - d') \end{cases}$$

A força normal decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atuam sobre a peça à qual pertence a seção é N_{sd} . Esta força normal é denominada força normal solitante de cálculo.

Nos casos de dimensionamento faz-se $N_{sd} = N_{sd}$ onde:

N_{sd} = força normal solitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo F_d no estado limite último

$$N_{sd} = \gamma_f N$$

N = força normal solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo F em serviço

Com N_{sd} em lugar de N_{rd} , as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} N_{sd} = b_w h 0,85 f_{cd} + A_s' \sigma_s' + A_s \sigma_s \\ N_{sd} e_s = b_w h 0,85 f_{cd} (d - h / 2) + A_s' \sigma_s' (d - d') \end{cases}$$

Essas equações podem ser colocadas na forma adimensional como foi feito na flexão normal composta com pequena excentricidade.

Dividindo-se os dois membros da 1ª equação pelo produto $b_w d f_{cd}$ e os dois membros da 2ª equação pelo produto $b_w d^2 f_{cd}$, resultam as equações na forma adimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{sd} \\ b_w \cdot d \cdot f_{cd} \\ N_{sd} e_s \\ b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} h \\ d \\ h \\ d \end{array} \right. \frac{A_s' \cdot \sigma_s'}{f_{cd}} + \left\{ \begin{array}{l} A_s \\ b_w \cdot d \\ h \\ d \end{array} \right. \frac{\sigma_s}{f_{cd}}$$

$$N_{sd} e_s = 0,85 \cdot \frac{h}{d} \cdot \left(1 - \frac{h}{2d}\right) + \frac{A_s' \cdot \sigma_s' \cdot d - d'}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}}$$

Aplicam-se aqui as mesmas definições vistas em 6.2, mas agora com:

$$\omega = 0,85 \cdot \frac{h}{d} = 0,95 \cdot \frac{d+d'}{d} = 0,85 \cdot (1 + \eta) \quad \text{tabelado}$$

$$\mu = 0,85 \cdot \frac{h}{2d} \cdot \left(1 - \frac{h}{2d}\right) = 0,85 \cdot \frac{h}{d} \cdot \left(1 - \frac{h}{2d}\right) = 0,425 \cdot (1 - \eta)^2 \quad \text{tabelado}$$

Então, no caso de armadura dupla, as equações de equilíbrio ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_d = \omega + \omega d' \cdot \frac{\sigma_s'}{\sigma_s} + \omega d_i \cdot \frac{\sigma_{si}}{\sigma_s} \\ f_{y,d} = \mu + \omega d' \cdot \frac{\sigma_s'}{f_{y,d}} \cdot (1 - \eta) \end{array} \right.$$

Não se usa armadura simples para este caso.

Nos dois casos:

1. As relações $\sigma_s' / f_{y,d}$ e $\sigma_s' / f_{y,d}$ são tabeladas em função de β_x para cada eço.
2. No dimensionamento, procede-se como indicado no item 6.3.2.

6.5 - Comentários

1. Na flexão normal composta com grande excentricidade (domínios 2, 3 ou 4) a linha neutra conta a seção transversal de concreto. Isto significa que uma das armaduras (A_s) é tracionada e a outra (A_s'), se existir, é comprimida.
 - A situação é a mesma da flexão normal simples, que ocorre nos mesmos domínios 2, 3 ou 4. Por isso, valem para a flexão normal composta com grande excentricidade os mesmos comentários e observações feitos para a flexão normal simples no capítulo 5.
 - Respeitar a taxa mínima de armadura longitudinal tracionada. A NBR-6118 exige para as seções retangulares que a taxa de armadura longitudinal de tração seja $\rho = A_s / A_c \geq \rho_{min}$ onde $A_c = b_w \cdot h$ e $\rho_{min} = 0,035 \cdot f_{cd} / f_{y,d} \geq 0,0015$.
 - Respeitar a taxa máxima de armadura longitudinal tracionada. A NBR-6118 exige que a soma das áreas das armaduras de tração e de compressão ($A_s + A_s'$) não seja maior que $0,04 \cdot A_c$.
2. Na flexão normal composta em qualquer dos domínios 2, 3, 4, 4a ou 5:
 - β_{x1} é o valor particular de β_x ao qual corresponde a solução em que $A_s' = 0$.
 - No dimensionamento, quando for adotado $\beta_x = \beta_{x1}$ (se isto for possível) a área de armadura A_s' é dispensada.
 - O valor de β_{x1} pode ser obtido das tabelas dos coeficientes μ e ω fazendo $\mu = f_{y,d}$.
 - O valor de β_{x1} também pode ser obtido pela expressão: $\beta_{x1} = 1,25 - \sqrt{1,5625 - 3,6765 \cdot \mu_{y,d}}$

3. Na flexão normal composta em qualquer dos domínios 2, 3, 4, 4a ou 5:
 - β_{x2} é o valor particular de β_x ao qual corresponde a solução em que $A_s = 0$.
 - No dimensionamento, quando for adotado $\beta_x = \beta_{x2}$ (se isto for possível) a área de armadura A_s é dispensada.
 - O valor de β_{x2} é dado pela expressão: $\beta_{x2} = 1,25 \cdot \eta + \sqrt{1,5625 \cdot \eta^2 + 3,6765 \cdot [\nu_d \cdot (1 - \eta) - f_{y,d}]}$

4. Na flexão normal composta em qualquer dos domínios 2, 3, 4, 4a ou 5, todos os outros valores de β_x que possam ser adotados no dimensionamento mas que não sejam β_{x1} ou β_{x2} levam a soluções que exigem a presença das duas áreas de armadura A_s e A_s' .

5. Na compressão não uniforme (domínio 5) o dimensionamento deve ser feito com armadura dupla.

6. Na flexão normal composta com pequena excentricidade (domínio 4a) e na compressão não uniforme (domínio 5) as armaduras são comprimidas. As áreas das seções de armaduras, A_s e A_s' , devem respeitar a taxa mínima e a taxa máxima de armadura longitudinal comprimida, ou seja: $\rho = (A_s + A_s') / A_c \geq \rho_{min}$ e $\rho = (A_s + A_s') / A_c \leq \rho_{max}$ onde A_c corresponde à seção de concreto, $\rho_{min} = 0,15 \cdot [N_{sd} / (A_c \cdot f_{y,d})] \geq 0,004$ e $\rho_{max} = 0,08$ inclusive nos trechos de emenda por trespasses.

6.6 - Interação de momento fletor e força normal na flexão-compressão

A interação de momento fletor e força normal na flexão-compressão cria diferentes situações que se dividem em casos (definidos pelo momento fletor) e sub-casos (definidos pela força normal). Em cada caso e sub-caso, as duas equações de equilíbrio só podem ser satisfetias ao mesmo tempo para valores de β_x pertencentes ao correspondente intervalo no campo de variação de β_x nos domínios 2, 3, 4, 4a e 5. Esses casos e sub-casos são os apresentados a seguir.

Caso A: quando $0 < \beta_{x1} \leq \eta$ Solução: adotar $\beta_x = \beta_{x1}$

Caso B: quando $\eta < \beta_{x1} \leq 1,00$ Solução: adotar β_x nos intervalos abaixo

B.1: $\nu_d < (\nu_{y,d} - 0,425 \cdot \eta^2) / (1 - \eta)$ $\eta < \beta_x \leq \beta_{x1} < 1,00$

B.2: $\beta_{x2} < \beta_{x1}$ $\beta_{x2} \leq \beta_x \leq \beta_{x1} < 1,00$

B.3: $\beta_{x2} = \beta_{x1}$ $\beta_{x2} = \beta_x = \beta_{x1}$

B.4: $\beta_{x2} > \beta_{x1}$ Neste caso $A_s = A_{s,min}$ (tração) e $A_s' = 0$

Caso C: quando $1,00 < \beta_{x1} \leq 1,25$ Solução: adotar β_x nos intervalos abaixo

C.1: $\nu_d < (\nu_{y,d} - 0,425 \cdot \eta^2) / (1 - \eta)$ $\eta < \beta_x < 1,00$

C.2: $\beta_{x2} < 1,00 < \beta_{x1}$ $\beta_{x2} \leq \beta_x < 1,00$

C.3: $\beta_{x2} = 1,00$ $\beta_{x2} = \beta_x = 1,00$

C.4: $1,00 < \beta_{x2} \leq \beta_{x1}$ $1,00 < \beta_x \leq \beta_{x2}$

C.5: $\beta_{x2} > \beta_{x1}$ $1,00 < \beta_x \leq \beta_{x1}$

Caso D: quando $\nu_{y,d} > 0,425$ Solução: adotar β_x nos intervalos abaixo

D.1: $\nu_d < (\nu_{y,d} - 0,425 \cdot \eta^2) / (1 - \eta)$ $\eta < \beta_x < 1,00$

D.2: $\beta_{x2} < 1,00$ $\beta_{x2} \leq \beta_x < 1,00$

D.3: $\beta_{x2} = 1,00$ $\beta_{x2} = \beta_x = 1,00$

D.4: $1,00 < \beta_{x2} \leq 1,25 \cdot (1 + \eta)$ $1,00 < \beta_x \leq \beta_{x2}$

D.5: $\nu_d > (\nu_{y,d} + 0,425 \cdot (1 - \eta)^2) / (1 - \eta)$ $\beta_x > 1,00$

OBSERVAÇÕES:

1. β_{x1} é o valor de β_x quando $\mu = \mu_{sd}$. Se β_{x1} pertencer ao intervalo permitido para o caso do problema a ser resolvido e se for adotado $\beta_x = \beta_{x1}$, a solução será com $A_s^* = 0$.

2. O máximo valor de $\mu = 0,68, \beta_{x1}(1 - 0,4, \beta_{x1})$ é 0,425 e acontece para $\beta_x = 1,25$.

3. Os casos A, B, e C acontecem quando $\mu_{sd} \leq 0,425$ e portanto existe β_{x1} definido para $\mu = \mu_{sd}$.

4. O caso D acontece quando $\mu_{sd} > 0,425$ e portanto não existe β_{x1} porque sempre será $\mu_{sd} > \mu$ para qualquer valor de β_x . Por isso, na 2ª equação de equilíbrio $\mu_{sd} = \mu + \omega_d \cdot (\cos^2 / \beta_{x1}) \cdot (1 - \eta)$ o segundo termo do segundo membro nunca poderá ser nulo na situação de equilíbrio. Por isso, no caso D sempre será $A_s^* \neq 0$, isto é, sempre a armadura de área A_s^* será necessária.

5. Deve ser lembrado que no dimensionamento nos domínios 2, 3 e 4 (flexão composta com grande excentricidade) sempre que a área de armadura do lado tracionado for $0 \leq A_s < A_{s, \min}$, deve-se adotar $A_s = A_{s, \min}$ e no caso de armadura dupla, respelir o limite superior para a soma das áreas de armaduras ($A_s + A_s'$), como já comentado no item 1 em 6.5 - Comentários.

6. Deve também ser lembrado que no dimensionamento no domínio 4a (flexão composta com pequena excentricidade) ou no domínio 5 (compressão não uniforme) as armaduras de áreas A_s e A_s' são comprimidas e devem ser satisfeitas as taxas mínima e máxima de armaduras comprimidas para a soma ($A_s + A_s'$), como já comentado no item 6 em 6.5 - Comentários.

7. Como se vê, o método de cálculo apresentado cobre de forma contínua o dimensionamento à flexão-compressão nos domínios 2, 3, 4, 4a e 5.

- Aplica-se ao dimensionamento à flexão normal simples considerando-se $N_{sd} = 0$, portanto $v_d = 0$, e $M_{sd} = M_{sd}$, portanto $\mu_{sd} = M_{sd} / (b \cdot x \cdot d^2 \cdot f_{cd})$. Acontece apenas o caso B, 1 daqueles vistos no item 6.6.

- Aplica-se também ao dimensionamento à flexão-tração nos domínios 2, 3 e 4 considerando $N_{sd} < 0$ e portanto $v_d < 0$. Na interação entre momento fletor e força normal apenas acontecem o caso A e o caso B, 1 daqueles vistos no item 6.6.

- Por esses razões as equações de equilíbrio apresentadas na forma adimensional são denominadas equações universais e as tabelas auxiliares são conhecidas por tabelas universais para as solicitações normais.

6.7 - Cobrimento das armaduras

O cobrimento das armaduras é sempre referido à superfície da armadura externa, em geral à face externa dos estribos.

Para garantir o cobrimento mínimo (c_{min}), o perfil e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc).

O cobrimento das armaduras dos pilares e vigas deve respelir o cobrimento nominal indicado na Tabela 3.3 do item 3.3.2 deste texto.

7 - FLEXÃO NORMAL COMPOSTA - FORÇA NORMAL TRACÇÃO

7.1 - Introdução

Flexão normal é aquela em que o plano de flexão contém um dos eixos principais de inércia da seção transversal.

Flexão composta é o caso de solicitação normal em que atuam simultaneamente momento fletor (M) e força normal (N).

Os esforços são referidos convencionalmente ao CG da seção de concreto. A força normal N de tração é considerada negativa. O momento fletor M é considerado sempre positivo.

Nas estruturas de concreto a flexão normal composta com força normal de tração ocorre em alguns casos. Ocorre em paredes de reservatórios elevados e em pilares de edifícios industriais, quando o vento produz sucção na cobertura. A tração uniforme é um caso particular em que o momento fletor é nulo e ocorre nos frentes e pendurais de treliças e arcos de concreto.

A Figura 7.1 apresenta uma seção retangular de concreto com armaduras cujas áreas de seção transversal são A_s e A_s' , submetida a um momento fletor M_{sd} e uma força normal de tração N_{sd} , e mostra as situações que podem decorrer da interação de momento fletor e força normal. Este é o par de esforços que escolta a resistência da seção.

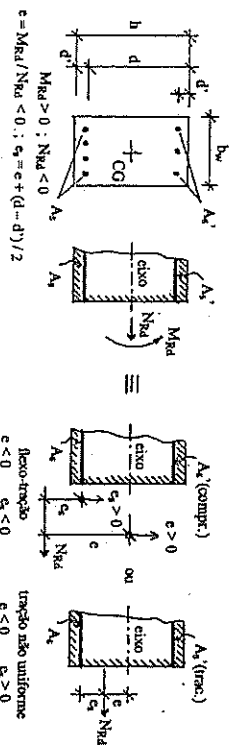


Figura 6.1 - Flexão normal composta de uma barra com seção retangular

7.2 - Flexão-tração

Flexão-tração é a flexão composta com força normal de tração em que a linha neutra corta a seção transversal estando uma das armaduras tracionada.

A_s = área da seção transversal da armadura tracionada
 A_s' = área da seção transversal da armadura comprimida

Ocorre nos domínios 2, 3 e 4 de deformações. Por isso, $0 < x < d$ e daí, $0 < \beta_x < 1$.

$\beta_x = x / d$
 $\eta = d' / d$

A flexão-tração é um caso de flexão composta com grande excentricidade, como aquele da flexão-compressão discutido no Capítulo 6. Todo o desenvolvimento analítico e as tabelas para flexão composta com grande excentricidade vistos no Item 6.2 do Capítulo 5 se aplicam neste caso, bastando que se admita $N_{sd} < 0$ e se mantenham as demais convenções. Daí resultam $\epsilon < 0$ e $\epsilon_s < 0$.

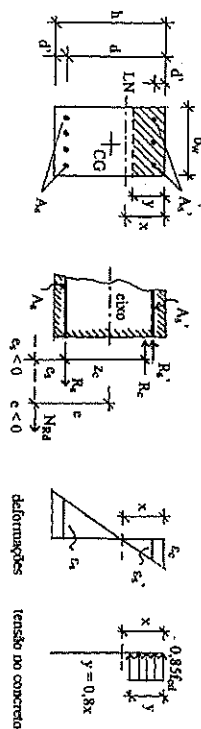


Figura 7.2 – Flexão-tração

Considerando uma seção retangular de concreto submetida à flexão-tração, como mostri- a Figura 7.2, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} N_{rd} = R_c + R_s - R_3 \\ N_{rd} \cdot e_s = R_c \cdot z_c + R_s \cdot (d - d') \end{cases}$$

onde as notações são as mesmas adotadas nos Capítulos 5 e 6 e os valores da força normal N_{rd} e da excentricidade e_s são acompanhados, cada um, pelo sinal (-).

Nessas equações:

$$\begin{aligned} R_c &= b_w \cdot y \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \\ R_s &= A_s \cdot \sigma_s \\ R_3 &= A_s \cdot \sigma_s \\ z_c &= d - y / 2 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{cases} N_{rd} = b_w \cdot y \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot \sigma_s - A_s \cdot \sigma_s \\ N_{rd} \cdot e_s = b_w \cdot y \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - y / 2) + A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - d') \end{cases}$$

Com $y = 0,8 \cdot x$ e $x = \beta_x \cdot d$

$$\begin{aligned} y &= 0,8 \cdot \beta_x \cdot d \\ z_c &= d \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) \end{aligned}$$

Introduzindo esses valores de y e z_c nas equações de equilíbrio, obtêm-se:

$$\begin{cases} N_{rd} = b_w \cdot d \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} + A_s \cdot \sigma_s - A_s \cdot \sigma_s \\ N_{rd} \cdot e_s = b_w \cdot d^2 \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - d') \end{cases}$$

A força normal decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atua sobre a peça à qual pertence a seção é N_{sd} . Esta força normal é denominada força normal solitante de cálculo e o seu valor é acompanhado pelo sinal (-).

Nos casos de dimensionamento faz-se $N_{sd} = N_{rd}$

onde:

$$\begin{aligned} N_{sd} &= \text{força normal solitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo } F_d \text{ no estado limite último} \\ N &= \text{força normal solitante em serviço, decorrente das ações de cálculo } F \text{ em serviço} \end{aligned}$$

Com N_{sd} em lugar de N_{rd} , as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} N_{sd} = b_w \cdot d \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} + A_s \cdot \sigma_s - A_s \cdot \sigma_s \\ N_{sd} \cdot e_s = b_w \cdot d^2 \cdot 0,68 \cdot \beta_x \cdot f_{cd} \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - d') \end{cases}$$

Essas equações podem ser colocadas na forma adimensional:

Dividindo-se os dois membros da 1ª equação pelo produto $b_w \cdot d \cdot f_{cd}$ e os dois membros da 2ª equação pelo produto $b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}$, resultam as equações na forma adimensional:

$$\begin{cases} \frac{N_{sd}}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot \beta_x + \frac{A_s \cdot \sigma_s}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} - \frac{A_s \cdot \sigma_s}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} \\ \frac{N_{sd} \cdot e_s}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot \beta_x \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) + \frac{A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - d')}{b_w \cdot d \cdot f_{cd} \cdot d} \end{cases}$$

Nessas expressões:

$$\nu_d = \frac{N_{sd}}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} = \text{força normal reduzida ou força normal relativa } (\nu_d < 0)$$

$$\mu_d = \frac{N_{sd} \cdot e_s}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \text{momento reduzido ou momento relativo } (\mu_d > 0)$$

$$\begin{aligned} \omega &= 0,68 \cdot \beta_x && \text{tabelado em função de } \beta_x \\ \mu &= 0,68 \cdot \beta_x \cdot (1 - 0,4 \cdot \beta_x) && \text{tabelado em função de } \beta_x \end{aligned}$$

Define-se:

$$\omega_d = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} = \text{taxa mecânica de armadura referente a armadura } A_s$$

$$\omega_d' = \frac{A_s' \cdot f_{yd}}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} = \text{taxa mecânica de armadura referente a armadura } A_s'$$

$$\eta = d' / d$$

Das definições das taxas mecânicas de armadura resultam:

$$\begin{cases} \omega_d = \frac{A_s \cdot \sigma_s}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} \\ \omega_d' = \frac{A_s' \cdot \sigma_s'}{b_w \cdot d \cdot f_{cd}} \end{cases}$$

Então, no caso de armadura dupla, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} Vd = \omega + \omega_d' \frac{\sigma_s}{f_{yd}} - \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \\ \mu_{sd} = \mu + \omega_d' \frac{\sigma_s}{f_{yd}} (1 - \eta) \end{cases}$$

No caso de armadura simples:

$$\begin{cases} Vd = \omega - \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \\ \mu_{sd} = \mu \end{cases}$$

Então, no caso de armadura simples, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} Vd = \omega - \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \\ \mu_{sd} = \mu \end{cases}$$

As relações σ_s / f_{yd} e σ_s' / f_{ycd} são tabeladas em função de f_x para cada aço.

7.2.1 - Dimensionamento de seções retangulares com armadura simples

1. Calculam-se $v_d = N_{sd} / (b_w d f_{cd})$ e $\mu_{sd} = (N_{sd} e_g) / (b_w d^2 f_{cd})$ com $e = M_{sd} / N_{sd}$ e $e_g = e + (d - d') / 2$.
2. Para o valor de μ da tabela igual ao valor de μ_{sd} calculado a tabela fornece f_x e ω .
3. Se $f_x \leq f_{x,lim}$, adota-se $f_x = f_x$ e da 1ª equação de equilíbrio: $\omega_d (\sigma_s / f_{yd}) = \omega - v_d$.
4. Para $f_x = f_{x,lim}$ a tabela dos aços fornece σ_s / f_{yd} .
5. Então $\omega_d = (\omega - v_d) / (\sigma_s / f_{yd})$.
6. Daí vem $A_s = \omega_d b_w d (f_{cd} / f_{yd})$.
7. Se na etapa 2 resultar $f_x > f_{x,lim}$, então modificar a seção ou adotar armadura dupla.

7.2.2 - Dimensionamento de seções retangulares com armadura dupla

1. Calculam-se $v_d = N_{sd} / (b_w d f_{cd})$ e $\mu_{sd} = (N_{sd} e_g) / (b_w d^2 f_{cd})$ com $e = M_{sd} / N_{sd}$ e $e_g = e + (d - d') / 2$.
2. Adota-se um valor para $f_x \leq f_{x,lim}$ e a tabela fornece μ e ω .
3. Da 2ª equação de equilíbrio vem $\omega_d (\sigma_s' / f_{ycd}) = (\mu_{sd} - \mu) / (1 - \eta)$.
4. Para o valor de f_x adotado a tabela dos aços fornece σ_s' / f_{ycd} .
5. Então $\omega_d' = [(\mu_{sd} - \mu) / (1 - \eta)] / (\sigma_s' / f_{ycd})$.
6. Daí vem $A_s' = \omega_d' b_w d (f_{cd} / f_{ycd})$.
7. Da 1ª equação de equilíbrio vem $\omega_d (\sigma_s / f_{yd}) = \omega + \omega_d' (\sigma_s' / f_{ycd}) - v_d$.
8. Para o valor de f_x adotado a tabela dos aços fornece σ_s / f_{yd} .
9. Então $\omega_d = [\omega + \omega_d' (\sigma_s' / f_{ycd}) - v_d] / (\sigma_s / f_{yd})$.
10. Daí vem $A_s = \omega_d b_w d (f_{cd} / f_{yd})$.

OBSERVAÇÕES:

1. Lembrar que $v_d < 0$ porque $N_{sd} < 0$.
2. Lembrar que $\mu_{sd} > 0$ porque $N_{sd} < 0$ e $e_s < 0$. Portanto, o produto é $N_{sd} e_s > 0$.

7.2.3 - Interação de momento fletor e força normal na flexão-tração

A interação de momento fletor e força normal na flexão-tração em situações diferentes que se dividem em caso A e caso B:

Caso A: quando $0 < f_{x1} \leq \eta$ Solução: adotar $f_x = f_{x1}$
Caso B: quando $\eta < f_{x1} \leq 1,00$ Solução: adotar f_x no intervalo $\eta < f_x \leq f_{x1}$

Como foi visto na flexão-compressão:

1. f_{x1} é o valor particular de f_x ao qual corresponde a solução em que $A_s' = 0$.
2. No dimensionamento, quando for adotado $f_x = f_{x1}$ a área de armadura A_s' é dispensada.
3. O valor de f_{x1} pode ser obtido das tabelas dos coeficientes μ e ω fazendo $\mu = \mu_{sd}$.
4. O valor de f_{x1} também pode ser obtido pela expressão:
 $f_{x1} = 1,25 - \sqrt{1,5625 - 3,6765 \mu_{sd}}$

7.3 - Tração não uniforme

Tração não uniforme é a flexão composta em que a linha neutra é externa à seção transversal da peça estando toda a seção tracionada, inclusive o concreto.

$A_s =$ área da seção transversal da armadura menos tracionada
 $A_s' =$ área da seção transversal da armadura menos tracionada

Ocorre no domínio 1 de deformações. Por isso, $-\infty < x \leq 0$ e daí, $-\infty < f_x \leq 0$.
 Valem as definições vistas na flexão normal simples:
 $f_x = x / d$
 $\eta = d' / d$

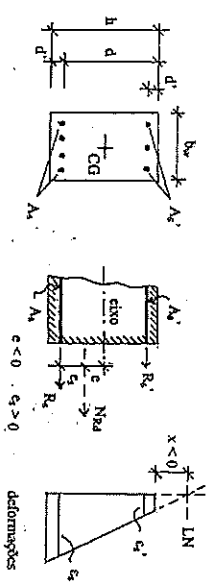


Figura 7.3 - Tração não uniforme

Considere-se uma seção retangular de concreto submetida à tração não uniforme, como mostra a Figura 7.3.

A seção resistente é composta apenas pelas áreas das armaduras tracionadas, A_s e A_s' . O concreto tracionado está fissurado e não participa da seção resistente.

Como a força normal N_{sd} e as resultantes R_s e R_s' são forças de tração e, por isso, de mesmo sentido, pode-se dispensar a convergência de sinais e considerá-las todas positivas. Assim, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} N_{sd} = R_s + R_s' \\ N_{sd} e_g = R_s' (d - d') \end{cases}$$

onde as notações são as mesmas adotadas nos Capítulos 5 e 6.

Nessas equações:
 $R_s = A_s \cdot \sigma_s$
 $R_s = A_s \cdot \sigma_s$

Então:

$$\begin{cases} N_{sd} = A_s \cdot \sigma_s + A_{s0} \cdot \sigma_s \\ N_{rd, e_s} = A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - d') \end{cases}$$

Neste caso, o estado limite último é caracterizado quando a deformação na armadura mais tracionada, de área A_s , atingir o valor $\epsilon_s = 1\%$. Como $\epsilon_s = 1\% > \epsilon_{yd}$, a tensão nessa armadura é a tensão de escoamento $\sigma_s = f_{yd}$.

Embora se saiba que a outra armadura, de área A_{s0} , também está tracionada, não se conhece a priori a sua deformação ϵ_{s0} e a tensão σ_{s0} que age sobre ela, porque não se conhece a posição da linha neutra, podendo ser $\epsilon_{s0} \leq \epsilon_{yd}$ e por isso $\sigma_{s0} \leq f_{yd}$.

Como o concreto não participa da seção resistente, a posição da linha neutra não interessa e o problema pode ser resolvido apenas satisfazendo as condições de equilíbrio. Assim, a situação mais econômica corresponde a admitir-se $\sigma_{s0} = f_{yd}$.

Então as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} N_{rd} = A_s \cdot f_{yd} + A_{s0} \cdot f_{yd} \\ N_{rd, e_s} = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d') \end{cases}$$

A força normal decorrente das ações de cálculo no estado limite último que atua sobre a peça à qual pertence a seção é N_{sd} . Esta força normal é denominada força normal solicitante de cálculo e é tomada em valor absoluto dispensando a convenção de sinais, como já mencionado.

Nos casos de dimensionamento faz-se $N_{sd} = N_{rd}$

onde:
 N_{sd} = força normal solicitante de cálculo, decorrente das ações de cálculo F_d no estado limite último

$$N = N_{sd} = \gamma_c \cdot N$$

N = força normal solicitante em serviço, decorrente das ações de cálculo F em serviço

Com N_{sd} em lugar de N_{rd} , as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} N_{sd} = A_s \cdot f_{yd} + A_{s0} \cdot f_{yd} \\ N_{sd, e_s} = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d') \end{cases}$$

Dai resultam:

$$A_s = \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \cdot \frac{e_s}{d - d'}$$

$$A_s = \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \cdot \frac{d - d' - e_s}{d - d'}$$

No caso particular de tração uniforme, $e = 0$ e $e_s = (d - d') / 2$. Então:

$$A_s = A_s^* = N_{sd} / (2 \cdot f_{yd})$$

ou simplesmente:

$$A_{s, total} = N_{sd} / f_{yd}$$

com $A_s = A_s^* = (A_{s, total} / 2)$ situadas, cada uma, em cada face.

7.4 - Cobrimento das armaduras

O cobrimento das armaduras é sempre referido à superfície da armadura externa, em geral à face externa dos estribos.

Para garantir o cobrimento mínimo (c_{min}), o projeto e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc).

O cobrimento das armaduras dos elementos estruturais deve respeitar o cobrimento nominal indicado na Tabela 3.3 do item 3.3.2 deste texto.

8 - FLEXÃO COMPOSTA NORMAL E OBLÍQUA EM SEÇÕES COM ARMADURAS SIMÉTRICAS

8.1 - Flexão normal composta

No dimensionamento das seções retangulares à flexão normal composta é comum definir previamente um arranjo de armaduras simétricas.

Alguns exemplos para as seções retangulares são os seguintes:

- armadura bilateral simétrica ($A_s = A_s' = A_{s\text{total}} / 2$), como mostra a Figura 8.1-a;
 - armadura formada por uma barra em cada vértice da seção ($A_{s\text{total}} / 4$ em cada canto), como mostra a Figura 8.1-b;
 - armadura distribuída igualmente nos quatro lados da seção ($A_{s\text{total}} / 4$ em cada lado), como mostra a Figura 8.1-c;
 - armadura distribuída nas duas faces laterais da seção ($A_{s\text{total}} / 2$ em cada face lateral), como mostra a Figura 8.1-d;
- Nas seções circulares, as barras são distribuídas regularmente ao longo do perímetro.

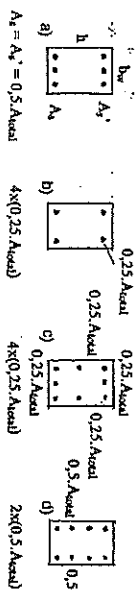


Figura 8.1 - Alguns arranjos de armadura comuns para seções retangulares

Os esforços são referidos ao CG da seção transversal de concreto. A força normal N é positiva quando for de compressão e negativa quando for de tração. O momento M é sempre positivo.

As equações de equilíbrio no estado limite último. Vistas na flexão normal composta nos Capítulos 6 e 7, são ajustadas para cada seção de concreto com armadura dada e, na sua forma adimensional, permitem a construção de diagramas de interação ($\mu_d - \nu_d$) de momento fletor e força normal que fornecem para a seção a taxa mecânica de armadura total, ou seja, para um dado par de esforços solicitantes de cálculo (M_{scl} , N_{scl}). Dessa taxa decorre a área total de armadura, $A_{s\text{total}}$, necessária. A forma típica desses diagramas é mostrada na Figura 8.2.

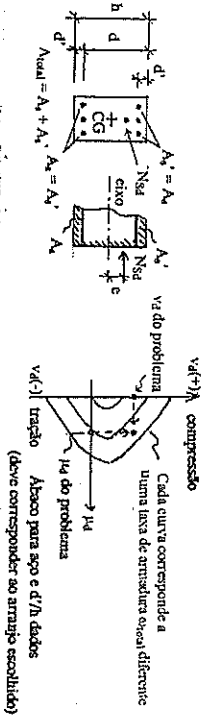


Figura 8.2 - Diagrama típico de interação na flexão normal composta

Para dimensionamento, procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. São dados: seção de concreto, concreto (f_{cd}), categoria do aço (f_{yd}), arranjo de armaduras adotado e os esforços solicitantes de cálculo $N_{scl} = \gamma_l N$ e $M_{scl} = N_{scl} e$.
2. Calculam-se:
 $\nu_d = N_{scl} / (f_{cd} b_w h)$ força normal reduzida ou força normal relativa
 $\mu_d = M_{scl} / (f_{cd} b_w h^2)$ momento reduzido ou momento relativo
relação μ_d / ν_d
3. Seleciona-se o diagrama de interação correspondente ao arranjo de armaduras e aço escolhidos e à relação μ_d / ν_d da seção, como o diagrama típico mostrado na Figura 8.2.
4. Para os valores de ν_d e μ_d calculados, o diagrama fornece a taxa mecânica de armadura total ou seja, como mostra a Figura 8.2.
5. Daí vem: $A_{s\text{total}} = \eta_{scl} b_w h (\mu_d / \nu_d)$.
6. A área total de armadura deve ser distribuída na seção de acordo com o arranjo de armaduras escolhido e o diagrama de interação adotado inicialmente.
- Se for o caso de armaduras simétricas: ($A_s = A_s' = A_{s\text{total}} / 2$);
- Se for o caso de 4 barras (uma barra em cada canto): $A_{s\text{total}} / 4$ em cada canto;
- Se for o caso de armaduras iguais distribuídas nas 4 faces: $A_{s\text{total}} / 4$ em cada face;
- Assim por diante (existem diagramas para algumas distribuições diferentes).

Esses arranjos de armadura, por possuírem simetria, são úteis nos casos em que o momento fletor solicitante possa sofrer inversão de sentido, no seu plano de ação, como acontece com as solicitações devidas ao vento e aquelas devidas a cargas móveis em edifícios industriais.

8.2 - Flexão oblíqua composta

Flexão oblíqua é aquela em que o plano de flexão não contém os eixos principais de inércia da seção transversal.

Flexão composta é o caso de solicitação normal em que atuam simultaneamente momento fletor (M) e força normal (N).

Os esforços são referidos ao CG da seção transversal de concreto.

A força normal N é considerada positiva quando for de compressão e negativa quando for de tração. O momento fletor M será sempre positivo.

Nas estruturas de concreto a flexão oblíqua ocorre principalmente nos pilares de canto. Ocorre também em vigas, desde que além das ações verticais coexistam ações horizontais, como algumas pertencentes a muros de arrimo e aquelas que apoiam palanetas de escadas.

No dimensionamento das seções retangulares à flexão oblíqua composta também é comum definir previamente um arranjo de armaduras simétricas.

Exemplos para as seções retangulares são os mesmos mostrados na Figura 8.1. Nas seções circulares a armadura é distribuída no perímetro e a flexão oblíqua é a própria flexão normal em decorrência da simetria geral da seção.

Para estudo das condições de equilíbrio dos esforços e da compatibilidade das deformações, adota-se um sistema de eixos tri-ortogonais $Oxyz$. A origem O situa-se no CG da seção geométrica da peça, o eixo z é perpendicular à seção e os eixos x e y coincidem com os eixos principais de inércia da seção.

A compatibilidade de deformações é analisada no plano de flexão, que é obtido aos planos que contêm os eixos x e y . A análise do equilíbrio entre a força normal e as resultantes das tensões no concreto e na armadura se faz na direção z . A análise do equilíbrio entre o momento fletor e os momentos das tensões resultantes se faz através das suas componentes nos planos dos eixos x e y . Assim, existe uma equação de equilíbrio de forças e duas equações de equilíbrio de momentos: uma em relação à direção x e outra em relação à direção y .

As equações de equilíbrio no estado limite último, vistas na flexão normal composta nos Capítulos 6 e 7, são ajustadas para cada seção de concreto com armadura dada considerando os componentes de momento nos planos dos eixos x e y , na sua forma adimensional, permitem a construção de superfícies de interação ($M_{x,d} - M_{y,d} - V_d$) de momento fletor e força normal que fornecem para a seção a taxa mecânica de armadura total, ω_{tot} , para um dado termo de esforços sollicitantes de cálculo ($M_{x,d}$, $M_{y,d}$, $N_{s,d}$). Dessa taxa decorre a área total de armadura, $A_{s,tot}$, necessária. A forma típica dessa superfície é mostrada na Figura 8.3.

Nessa análise, a componente de momento $M_{x,d}$ atua no plano que contém o eixo x e a componente de momento $M_{y,d}$ atua no plano que contém o eixo y .

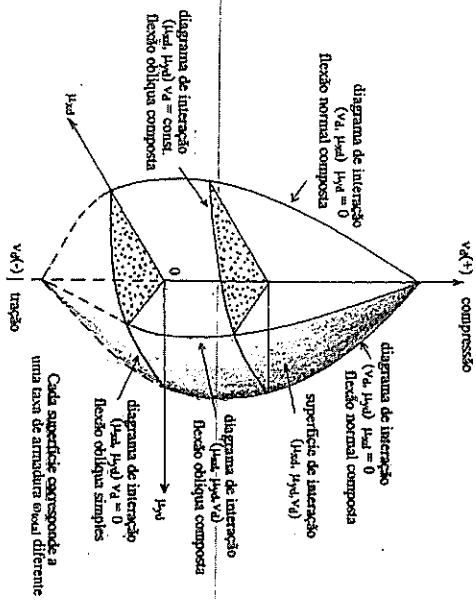


Figura 8.3 – Superfície típica de interação na flexão oblíqua composta

Para ser possível representar no plano a interação de momento fletor e força normal que se dá no espaço, das superfícies de interação ($M_{x,d} - M_{y,d} - V_d$) são extraídos os diagramas de interação ($M_{x,d} - M_{y,d}$) visualizados no plano xy para valores de V_d adotados, como mostra a Figura 8.3.

Assim, a representação das superfícies de interação é feita através de diagramas chamados de âbacos em rosela, correspondentes a cortes da superfície de interação, definidos por diferentes valores de V_d , como mostra a Figura 8.4.

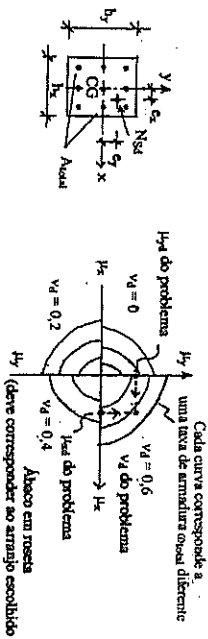


Figura 8.4 – Diagrama de interação em rosela

Para dimensionamento, procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo.

1. São dados: seção de concreto, concreto (f_{cd}), categoria do aço (f_{yd}), arranjo de armaduras adotado e os esforços sollicitantes de cálculo $N_{s,d} = \gamma \cdot N$, $M_{x,d} = N_{s,d} \cdot e_x$ e $M_{y,d} = N_{s,d} \cdot e_y$.
2. Calculam-se:
 - $V_d = N_{s,d} / (A_c \cdot f_{cd})$ força normal reduzida ou força normal relativa
 - $M_{x,d} = M_{x,d} / (A_c \cdot h_x \cdot f_{cd})$ momento reduzido ou momento relativo em x
 - $M_{y,d} = M_{y,d} / (A_c \cdot h_y \cdot f_{cd})$ momento reduzido ou momento relativo em y
3. Seleciona-se o âbaco em rosela correspondente ao arranjo de armaduras e aço escolhidos, como mostrado na Figura 8.4 para armaduras iguais nos quatro faces.
4. Para os valores de v_d , $M_{x,d}$ e $M_{y,d}$ calculados, o âbaco fornece a taxa mecânica de armadura total ω_{tot} , como mostra a Figura 8.4.
5. Daí vem: $A_{s,tot} = \omega_{tot} \cdot A_c \cdot f_{cd} / f_{yd}$.
6. A área total de armadura deve ser distribuída na seção de acordo com o arranjo de armaduras escolhido e o âbaco adotado inicialmente.
 - Se for o caso de armaduras simétricas: $A_s = A_y = A_{s,tot} / 2$;
 - Se for o caso de 4 barras (uma barra em cada canto): $A_{s,1} / 4$ em cada canto;
 - Se for o caso de armaduras iguais distribuídas nas 4 faces: $A_{s,1} / 4$ em cada face;
 - Assim por diante (existem diagramas para algumas distribuições diferentes).

8.3 - Comentários

1. Existem diagramas, como os aqui apresentados, para seções cheias e vazadas nos livros de P. B. Fiasco, de W. Pfeil e de P. J. Montoya:
 - FUSCO, P. B. *Estruturas de Concreto - Soluções Normais*. Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.
 - PFEIL, W. *Dimensionamento de concreto armado à flexão composta*. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1976.
 - MONTAYA, P. J., MESSGUER, A. G. e CABRÉ, F. M. *Hormiçón Armado*. 7.ª Ed., Gustavo Gill S. A., Barcelona, 1973.
2. Para diferentes autores, pequenas diferenças podem ser encontradas nos diagramas.
3. Em princípio, os procedimentos para uso desses diagramas são os mesmos, basta seguir a orientação indicada pelos autores.
4. Os diagramas apresentados também se aplicam à flexão normal simples e à flexão oblíqua simples bastando fazer $V_d = 0$ porque $N_{s,d} = 0$.

8.4 - Cobrimento das armaduras

O cobrimento das armaduras é sempre referido à superfície da armadura externa, em geral à face externa dos estabos.

Para garantir o cobrimento mínimo (c_{min}), o projeto e a execução devem consistir o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc).

O cobrimento das armaduras dos pilares e vigas deve respeitar o cobrimento nominal indicado na Tabela 3.3 do item 3.3.2 deste texto.

9 - PILARES USUAIS DE EDIFÍCIOS

9.1 - Análise sucinta das estruturas de edifícios

Usualmente as estruturas de edifícios são compostas por elementos de duas categorias: *elementos contraventados* (pilares) e *elementos de contraventamento* (paredes de concreto engastadas na fundação ou pilóticos múltiplos, muitas vezes entrelaçados).

Os elementos que formam a estrutura de contraventamento devem resistir a ação do vento e garantir a estabilidade global da estrutura. Esses elementos devem ter rigidez suficiente para que os elementos que fazem parte da estrutura contraventada possam ser considerados como participantes de uma estrutura com nós indistinguíveis, como mostra a Figura 9.1.

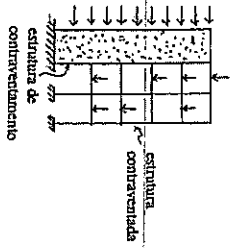


Figura 9.1 - Estrutura contraventada e estrutura de contraventamento

Estruturas com nós indistinguíveis são aquelas cujos nós mudam de posição em virtude da flexão de suas barras, como mostra a Figura 9.2-a. *Estruturas com nós indistinguíveis* são aquelas em que este fenômeno não acontece, como mostra a Figura 9.2-b.



(a) estrutura com nós indistinguíveis

(b) estrutura com nós indistinguíveis

Figura 9.2 - Estrutura indistinguível e estrutura indistinguível

9-1

Na verdade não existe estrutura indistinguível. Entretanto, quando a estrutura de contraventamento é suficientemente rígida, a estrutura como um todo pode ser considerada quase indistinguível. Nesse caso, os pilares da estrutura contraventada podem ser considerados como pertencentes a uma estrutura indistinguível e, por isso, podem ser tratados como pilares isolados.

A Figura 9.3 mostra em perspectiva associações de elementos contraventados e elementos de contraventamento.

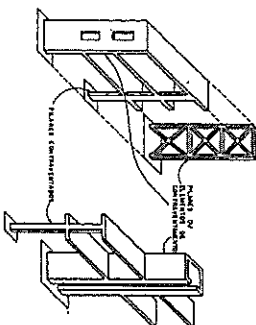


Figura 9.3 - Associações de elementos contraventados e elementos de contraventamento

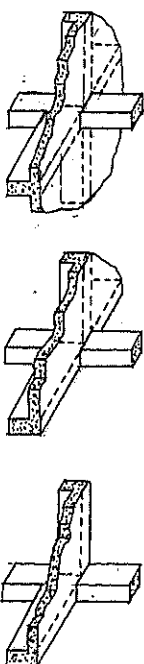
9.2 - Ação do vento

Será exigida a consideração da ação do vento nas estruturas em que esta ação possa produzir efeitos estáticos ou dinâmicos importantes. A NBR-6178 exige que os esforços devidos à ação do vento sejam considerados sempre e recomendada que sejam delimitados de acordo com o que prescreve a NBR-6123: *Forças devidas ao vento em edificações - Procedimento*, permitindo o emprego de regras simplificadas previstas em Normas Brasileiras específicas.

9.3 - Situações básicas de projeto

Com relação à localização dos pilares na estrutura distinguem-se três situações básicas de projeto, como aquelas mostradas na Figura 9.4.

1. Pilar intermediário: aquele que recebe vigas de direções diferentes e que se cruzam sem interrupção sobre ele.
2. Pilar de extremidade: aquele que recebe vigas de duas direções ortogonais quando uma delas se interrompe sobre ele.
3. Pilar de canto: aquele que recebe vigas de duas direções diferentes e que se interrompem sobre ele.



PILAR INTERMEDIÁRIO

PILAR DE EXTREMIDADE

PILAR DE CANTO

Figura 9.4 - Situações básicas de projeto relativas aos pilares das estruturas de concreto

9-2

9.4 – Esforços solicitantes iniciais

9.4.1 – Solicitações iniciais nos pilares intermediários

Os pilares intermediários estão predominantemente solicitados por forças axiais de compressão. Como as vigas e as lajes apoiadas sobre esses pilares não sofrem interrupção sobre eles, admitem-se como desprezíveis os momentos fletores transmitidos pelas vigas a estes pilares. Por isso, a solicitação básica de projeto dos pilares intermediários é de compressão centrada.

9.4.2 – Solicitações iniciais nos pilares de extremidade

Os pilares de extremidade estão submetidos à flexão normal composta. A flexão decorre da interrupção sobre o pilar, da viga perpendicular à borda considerada. Por isso, a situação básica de projeto dos pilares de extremidade é de flexão normal composta.

Os esforços solicitantes iniciais são constituídos por força normal e momento fletor atuante no plano vertical perpendicular à borda na qual o pilar se situa. Quando não for considerada a solidariedade dos pilares com as vigas, os momentos fletores de cada um dos pilares de extremidade poderão ser calculados de forma aproximada pelas seguintes expressões:

$$M_{inf} = M_{eng} \cdot \frac{l_{inf}}{l_{inf} + l_{viga} + l_{sup}} \cdot 1,5$$

$$M_{sup} = M_{eng} \cdot \frac{l_{sup}}{l_{inf} + l_{viga} + l_{sup}} \cdot 1,5$$

onde:

$$l_{inf} = l_{inf} / l_{inf}$$

$$l_{viga} = l_{viga} / l_{viga}$$

$$l_{sup} = l_{sup} / l_{sup}$$

são os índices de rigidez do pilar inferior, da viga e do pilar superior, respectivamente, e

M_{eng} = momento de engastamento porfeito da viga no pilar

l_{inf} = momento de inércia da seção transversal do pilar inferior

l_{viga} = momento de inércia da seção transversal da viga

l_{sup} = momento de inércia da seção transversal do pilar superior

l_{inf} = comprimento teórico do pilar inferior

l_{viga} = vão teórico da viga

l_{sup} = comprimento teórico do pilar superior

Nessas expressões, que levam a resultados aproximados, o coeficiente 1,5 deve-se à propagação para o nó em questão de parte dos momentos dos nós acima e abaixo dele.

Para haver equilíbrio, o momento fletor na extremidade da viga será:

$$M_{viga} = M_{inf} + M_{sup}$$

A Figura 9.5 mostra em elevação um trecho de pilar de extremidade e indica a variação do momento fletor ao longo do comprimento do pilar.

9-3

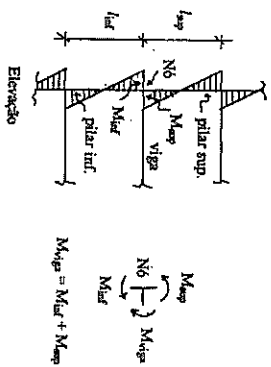


Figura 9.5 – Variação do momento fletor ao longo de um pilar de extremidade

9.4.3 – Solicitações iniciais nos pilares de canto

Os pilares de canto estão submetidos à flexão oblíqua composta. A flexão decorre da interrupção sobre o pilar, das vigas das duas bordas concorrentes. Por isso, a solicitação básica de projeto dos pilares de canto é de flexão oblíqua composta.

Os esforços solicitantes iniciais são formados por força normal e momentos fletores atuantes nos planos verticais que contêm os eixos das vigas que formam o canto considerado.

A Figura 9.6 mostra em elevação um trecho de um pilar de canto e indica a variação dos momentos ao longo do comprimento do pilar.

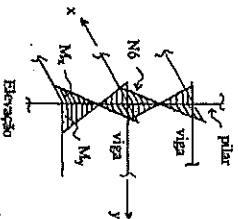


Figura 9.6 – Variação dos momentos fletores ao longo de um pilar de canto

9.5 – Conceitos fundamentais

Como regra geral, o dimensionamento ou a verificação dos pilares de concreto armado, devem ser realizados considerando-se a flexão composta (normal ou oblíqua).

A NBR-6118 não aceita o cálculo dos pilares de concreto armado considerando-se a compressão uniforme.

9-4

9.5.1 – Excentricidade Inicial (e₁)

Excentricidade inicial é aquela que decorre dos esforços solicitantes iniciais. A Figura 9.7 ilustra o conceito de excentricidade inicial.

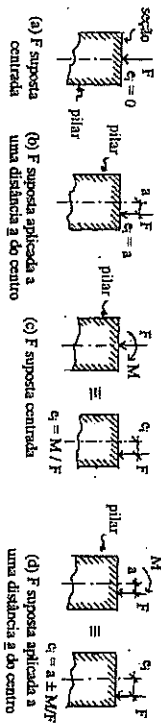


Figura 9.7 – Excentricidade Inicial

OBSERVAÇÃO: M e F atuam simultaneamente, mas são independentes um do outro.

9.5.2 – Excentricidade acidental (e₂)

No cálculo dos pilares de concreto, deve-se considerar o efeito do desaparecimento de alguma da falta de retilineidade do eixo do pilar. Essas influências são imperfeições geométricas que resultam de eventuais falhas que ocorrem durante a construção.

Nos casos usuais, admite-se que seja suficiente apenas a consideração da falta de retilineidade do eixo do pilar, como mostra a Figura 9.8.

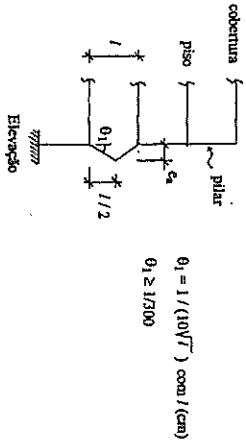


Figura 9.8 – Falta de retilineidade do eixo do pilar

A excentricidade acidental decorrente da falta de retilineidade do pilar é dada por:

$$e_a = \frac{l}{20\sqrt{l}} \geq \frac{l}{600} \quad (\text{cm})$$

onde l, em centímetros, é o comprimento teórico do pilar, tomado entre os eixos das vigas entre as quais ele se situa. Essa excentricidade é considerada na seção intermediária do pilar e se soma à excentricidade aí existente.

9.5.3 – Excentricidade de 1.º ordem (e₁) e excentricidade de 2.º ordem (e₂)

A excentricidade e₁ decorre do deslocamento da linha de ação da resultante F_g em relação ao eixo reto do pilar. Daí decorre que: e₁ = e_g.

A excentricidade e₂ decorre da deformação do eixo do pilar pela presença da carga F_g. A Figura 9.9 ilustra os conceitos de excentricidades de 1.º ordem e de 2.º ordem.

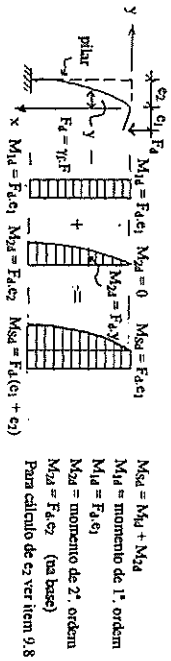


Figura 9.9 – Excentricidades de 1.º e de 2.º ordem

9.5.4 – Excentricidade mínima de 1.º ordem (e_{1,min})

O efeito das imperfeições geométricas nos pilares, representadas pelo desaparecimento e pela falta de retilineidade do eixo do pilar, pode ser substituído em estruturas constituídas por vigas e pilares, pela consideração da excentricidade mínima de 1.º ordem:

$$e_{1,min} = 1,5 + 0,03h \quad (\text{cm})$$

onde h, em centímetros, é a altura da seção transversal do pilar na direção considerada.

A essa excentricidade e_{1,min} deve ser acrescida a excentricidade e₂ de 2.º ordem.

9.5.5 – Índice de esbeltez (λ)

onde:

$$\lambda = l_e / i$$

l_e = comprimento de flambagem do pilar

i = raio de giração da seção transversal do pilar

$$i = \sqrt{I_c / A_c}$$

l_e = momento de inércia da seção transversal do pilar

A_c = área da seção transversal do pilar

Para estruturas consideradas indesejáveis, l_e é a distância entre os eixos das vigas entre as quais o pilar se situa, isto é, l_e = l, como mostra a Figura 9.10.

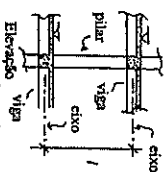


Figura 9.10 – Comprimento l do pilar

No caso de pilares engastados na base e livres no topo, o valor de e_2 é igual a $2l$, onde l é o comprimento do pilar.
 Outras situações de vinculação e os respectivos comprimentos de flambagem são mostrados na Figura 9.11.

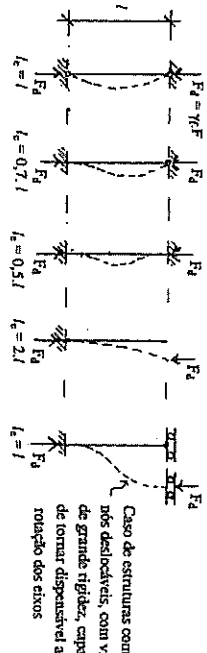


Figura 9.11 – Comprimento de flambagem de barras comprimidas

Quando $\lambda < \lambda_1$: pilar pouco esbelto; e_2 poderá ser desprezada.
 Quando $\lambda \geq \lambda_1$: pilar esbelto; e_2 deverá ser considerada.

Quando $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 90$: pilar medianamente esbelto; a segurança poderá ser verificada por processo aproximado.

Quando $90 < \lambda \leq 140$: pilar esbelto; a segurança poderá ser verificada por processo aproximado acoplado ao diagrama M - N - (1/l) e o efeito da deformação lenta (fluência) deverá ser considerado.

Quando $140 < \lambda \leq 200$: pilar muito esbelto; a segurança deverá ser verificada por processo exato e o efeito da deformação lenta (fluência) deverá ser considerado.
 Não poderão ser aceitos pilares com $\lambda > 200$.

9.6 – Índice de esbeltez limite λ_1

Um lance de pilar entre dois pavimentos da estrutura de um edifício pode ser representado pelas estruturas apresentadas na Figura 9.12.

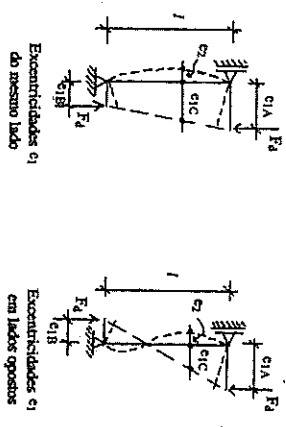


Figura 9.12 – Esquemas estruturais para um segmento de pilar situado entre dois pavimentos

As excentricidades de 1ª ordem nas extremidades do pilar, decorrentes das solicitações iniciais, são e_{1A} e e_{1B} sendo $|e_{1A}| > |e_{1B}|$ e $e_{1A} > 0$ e $e_{1B} < 0$ se as fibras sentidas opostas.

Na seção intermediária crítica, onde a excentricidade de 2ª ordem e_2 deverá ser considerada, a excentricidade de 1ª ordem é:

$$e_{1C} = 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \geq 0,4 e_{1A}$$

Nos pilares isolados, os esforços locais de 2ª ordem decorrentes de e_2 podem ser desprezados quando o índice de esbeltez λ for menor que o valor limite λ_1 .

O valor de λ_1 é calculado pela expressão:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5(e_{1A}/h)}{\alpha_b}$$

com: $35 \leq \lambda_1 \leq 90$

onde h é a altura da seção transversal do pilar na direção considerada.

O valor do coeficiente α_b é determinado conforme o critério seguinte:

a) Para pilares biapoiados sem forças transversais ao seu eixo

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{e_{1B}}{e_{1A}} \geq 0,4$$

com: $0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0$

b) Para pilares biapoiados com forças transversais significativas ao longo do seu comprimento:

$$\alpha_b = 1,0$$

c) Para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,8 + 0,2 \frac{e_{1C}}{e_{1A}} \geq 0,85$$

com: $0,85 \leq \alpha_b \leq 1,00$

onde e_{1A} é a excentricidade de 1ª ordem na extremidade engastada e e_{1C} é a excentricidade de 1ª ordem na seção do pilar situada a meio comprimento.

d) Para pilares biapoiados ou em balanço com excentricidades iniciais menores que a excentricidade mínima de 1ª ordem indicada no item 9.5.4:

$$\alpha_b = 1,0$$

9.7 – Cálculo sem consideração das deformações ($\lambda < \lambda_1$)

As excentricidades são medidas a partir do centro de gravidade da seção geométrica do pilar.

As direções x e y são as direções principais da seção geométrica do pilar. A armadura final deve ser a composição daquelas calculadas em separado para cada uma das situações para cálculo e não a soma dessas armaduras.

9.7.1 – F_d suposta centrada (Figura 9.13)

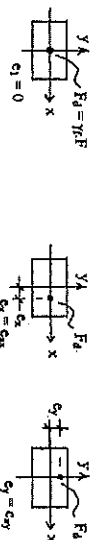


Figura 9.13 – F_d suposta centrada

- 1ª. Situação: $N_{sd} = F_d$ e $M_{sd} = M_{1d} = F_d \cdot e_y$ (flexão normal composta).
- 2ª. Situação: $N_{sd} = F_d$ e $M_{sd} = M_{1d} = F_d \cdot e_x$ (flexão normal composta).

9.7.2 – F_d excêntrica – flexão normal composta (Figura 9.14)

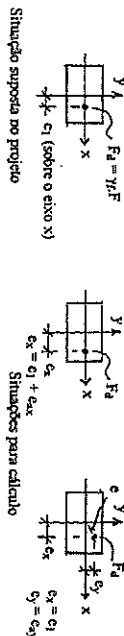


Figura 9.14 – F_d excêntrica – flexão normal composta

- 1ª. Situação: $N_{sd} = F_d$ e $M_{sd} = M_{1d} = F_d \cdot e_x$ (flexão normal composta).
- 2ª. Situação: $N_{sd} = F_d$ e $M_{sd} = M_{1d} = F_d \cdot e$ (flexão oblíqua composta).

9.7.3 – F_d excêntrica – flexão oblíqua composta (Figura 9.15)

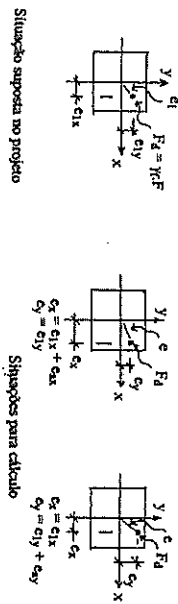


Figura 9.15 – F_d excêntrica – flexão oblíqua composta

- 1ª. Situação: $N_d = F_d$ e $M_d = M_{1d} = F_d \cdot e$ sendo e a composição de e_1 com e_{ax} .
- 2ª. Situação: $N_d = F_d$ e $M_d = M_{1d} = F_d \cdot e$ sendo e a composição de e_1 com e_{ay} .

9.8 – Cálculo com consideração das deformações ($\lambda \geq \lambda_1$)

A orientação apresentada refere-se ao processo aproximado de cálculo aplicável quando $\lambda_1 \leq \lambda \leq 90$.

Condições de validade: pilares com seção transversal constante e simétrica, inclusive a armadura, ao longo do seu comprimento, sob flexo-compressão e com $\lambda_1 \leq \lambda \leq 90$.

Este processo consiste em acrescentar ao momento de 1ª ordem (M_{1d}), determinado conforme o item anterior (item 9.7), o momento de 2ª ordem (M_{2d}) agindo no plano paralelo à excentricidade e_2 com que se calculou M_{1d} .

O momento de 2ª ordem M_{2d} é igual a:

$$M_{2d} = F_d \cdot e_2 \quad \text{com} \quad e_2 = \frac{l_0^2}{10 \cdot r}$$

onde:

l_0 = comprimento de flambagem do pilar

$1/r$ = curvatura da linha elástica

r = raio de curvatura da linha elástica na seção crítica

Na seção crítica

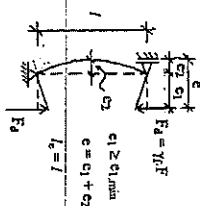


Figura 9.16 - Excentricidade $e = e_1 + e_2$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{(y_d + 0,5)h} \quad \text{com} \quad (y_d + 0,5) > 1$$

$$N_{sd} = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (\text{no caso, } N_{sd} \text{ é a força normal solitante de cálculo } = F_d)$$

A_c = área da seção transversal do pilar

h = altura total da seção da direção considerada

M_{2d} (ou e_2) será desprezado(a) quando $\lambda < \lambda_1$ na direção considerada.

Determinado M_{2d} , o cálculo da seção será feito com $N_{sd} = F_d$ e $M_{sd} = M_{1d} + M_{2d}$.

PROCEDIMENTO

Para determinação das solicitações de cálculo N_{sd} e M_{sd} procede-se de acordo com a seguinte rotina de cálculo:

1. Fazer tudo o que indica o item 9.7 para cálculo de e_1 . Respeitar $e_1 \geq e_{1min}$.
2. Acrescentar a excentricidade e_2 à excentricidade e_1 na direção correspondente a $\lambda \geq \lambda_1$. Pode ser uma só direção ou podem ser as duas direções das situações para cálculo.
3. Obtidos $e = e_1 + e_2$ em cada direção, calcular a seção a flexão composta com $N_{sd} = F_d$ e $M_{sd} = F_d \cdot (e_1 + e_2)$.
4. É melhor trabalhar com a excentricidade final $e = e_1 + e_2$ em lugar de $M_{sd} = M_{1d} + M_{2d}$.

9.9 – Definição da seção a ser calculada

Condições de validade:

- estrutura com nós considerados indeformáveis e
- ausência de força transversal aplicada ao longo do pilar.

A Figura 9.17 apresenta os esquemas estruturais para um segmento de pilar situado entre dois pavimentos de um edifício, considerando o caso em que as duas excentricidades nas extremidades estão do mesmo lado e o caso em que essas excentricidades estão em lados opostos em relação ao eixo do pilar. Essa figura ilustra os procedimentos para definir a seção de um pilar a ser calculada considerando a situação em que $\lambda < \lambda_1$ e a situação em que $\lambda \geq \lambda_1$.

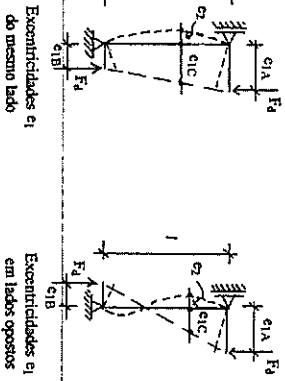


Figura 9.17 – Esquemas estruturais para um segmento de pilar situado entre dois pavimentos

9.9.1 – Situação em que $\lambda < \lambda_1$:

- Nas seções de extremidade as excentricidades são $|e_{1A}| > |e_{1B}|$
- Quando as excentricidades tiverem sentidos opostos: $e_{1A} > 0$ e $e_{1B} < 0$
- Calcular a seção de extremidade com maior excentricidade com $e = e_{1A} \geq e_{1,m}$ sem considerar e_2 e e_2 aplicando o item 9.7.

9.9.1 – Situação em que $\lambda \geq \lambda_1$:

- Nas seções de extremidade as excentricidades são $|e_{1A}| > |e_{1B}|$
- Quando as excentricidades tiverem sentidos opostos: $e_{1A} > 0$ e $e_{1B} < 0$
- Na seção de intermediária a excentricidade é: $e_{1C} = 0,5e_{1A} + 0,4e_{1B} \leq 0,4e_{1A}$
- Se $e_{1A} \geq e_{1C} + e_2 + e_2$: calcular a seção de extremidade com maior excentricidade com $e = e_{1A} \geq e_{1,m}$ sem considerar e_2 e e_2 , aplicando o item 9.7.
- Se $e_{1A} < e_{1C} + e_2 + e_2$: calcular a seção intermediária crítica com $e = e_{1C} + e_2 + e_2$, com $e_{1C} + e_2 \geq e_{1,m}$, aplicando os itens 9.7 e 9.8.

OBSERVAÇÕES

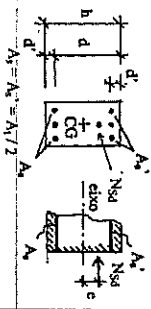
1. Estas considerações devem ser feitas para cada uma das direções das situações para cálculo do item 9.7.
2. Quando $e_{1A} = e_{1B} = 0$ (caso em que F_d é suposta centrada) calcular a seção intermediária com $e = e_2 + e_2$, com $e_2 \geq e_{1,m}$, considerando e_2 quando for o caso.
3. Na flexão oblíqua composta é melhor decidir pela seção a ser calculada pela comparação das taxas de armadura exigidas pelo cálculo e não apenas pelas excentricidades.

9.10 – Flexão normal composta de seções retangulares com arranjos de armadura pré-definidos

No dimensionamento das seções retangulares à flexão normal composta é comum definir previamente um arranjo para as barras de armadura. Alguns exemplos: armaduras simétricas ($A_s = A_s' = A_t / 2$), armadura formada por uma barra em cada vértice da seção ($A_t / 4$ em cada vértice), armadura distribuída igualmente nos quatro lados da seção ($A_t / 4$ em cada lado da seção) e outros. Nesse enfoque do problema A_t representa a área total da seção transversal de armadura.

As equações gerais de equilíbrio, vistas na flexão normal composta, são ajustadas para cada uma dessas situações e, na sua forma adimensional, permitem a construção de diagramas que fornecem a taxa mecânica de armadura total, ω , para um dado par de esforços solicitantes N_{sd} e M_{sd} , dados f_{ct} do concreto e a categoria do aço. Dessa taxa decorre a área total de armadura, A_t , necessária.

As Figuras 9.18 e 9.19 ajudam no entendimento do dimensionamento com armaduras simétricas. O mesmo raciocínio se estende para os outros casos.



1. São dados:
 - Seção de concreto
 - Concreto (f_{cd}) e aço (f_{td})
 - Arranjo das armaduras
 - $N_{sd} = \eta_1 N$
 - $M_{sd} = N_{sd} e$

Figura 9.18 – Seção retangular submetida à flexão normal composta

2. Calculam-se:

$$\eta_1 d = N_{sd} / (b_w h f_{cd})$$

$$\eta_2 d = M_{sd} / (b_w h^2 f_{cd})$$

$$\text{relação } d/h$$

força normal reduzida ou força normal relativa
momento reduzido ou momento relativo

3. Seleciona-se o diagrama correspondente ao arranjo de armaduras e aço adotados e à relação d/h da seção, como mostra a Figura 9.19 para armaduras simétricas.

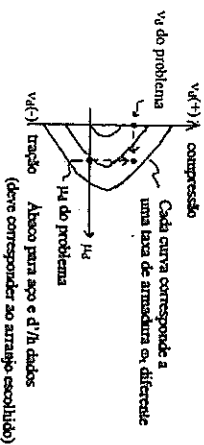


Figura 9.19 – Diagrama típico para dimensionamento com armaduras simétricas

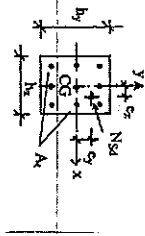
4. Para os valores de v_d e $\eta_1 d$ calculados, o diagrama fornece a taxa mecânica de armadura total, ω_t , como mostra a Figura 9.19.
5. Daí vem: $A_t = \omega_t b_w h (f_{cd} / f_{td})$
6. A área total de armadura deve ser distribuída na seção de acordo com o arranjo de armaduras escolhido e o diagrama adotado inicialmente.

- Se for o caso de armaduras simétricas: $A_s = A_s' = A_t / 2$ como na explicação anterior.
 - Se for o caso de 4 barras (uma em cada vértice da seção): $A_t / 4$ em cada vértice.
 - Se for o caso de armaduras iguais distribuídas nas 4 faces: $A_t / 4$ em cada face.
 - Assim por diante (existem ábacos para várias distribuições diferentes).

Esses arranjos de armadura, por possuírem simetria, são úteis no caso em que o momento fletor solicitante possa sofrer inversão de sentido no seu plano de ação, como acontece com as solicitações devidas ao vento e aquelas devidas a cargas móveis em edifícios industriais.

9.11 – Flexão oblíqua composta de seções retangulares com arranjos de armadura pré-definidos

O procedimento neste caso é análogo ao da flexão normal composta, agora com momento M_{xsd} agindo no plano paralelo ao eixo x e momento $M_{y sd}$ agindo no plano paralelo ao eixo y, além da força normal N_{sd} , como mostra a Figura 9.20.



- Seção de concreto
- Concreto (f_{cd}) e aço (f_{yd})
- Arranjo das armaduras
- $N_{sd} = \gamma_n N$
- $M_{xsd} = N_{sd} e_x$
- $M_{y sd} = N_{sd} e_y$

1. São dados:

Figura 9.20 – Seção retangular submetida à flexão normal composta

2. Calculam-se:

- $v_d = N_{sd} / (A_c f_{cd})$ força normal reduzida ou força normal relativa
- $\mu_{xd} = M_{xsd} / (A_c h_x f_{cd})$ momento reduzido ou momento relativo em x
- $\mu_{yd} = M_{y sd} / (A_c h_y f_{cd})$ momento reduzido ou momento relativo em y

3. Seleciona-se o ábaco em rosela correspondente ao arranjo de armaduras e aço adotados, como mostra a Figura 9.21 para armaduras iguais nas quatro faces.

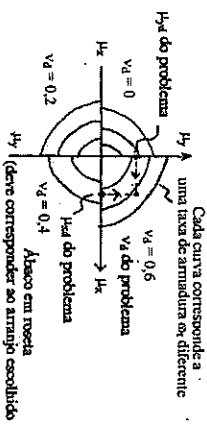


Figura 9.21 – Ábaco em rosela típico para dimensionamento com armaduras iguais nas quatro faces armadura total, ω_x , como mostra a Figura 9.21.

5. Dai vem: $A_t = \omega_t A_c (f_{cd} / f_{yd})$
 6. A área total de armadura deve ser distribuída na seção de acordo com o arranjo de armaduras escolhido e o ábaco adotado inicialmente:

- Se for o caso de 4 barras (uma em cada vértice da seção): $A_t / 4$ em cada vértice;
- Se for o caso de armaduras iguais distribuídas nas 4 faces: $A_t / 4$ em cada face;
- Assim por diante (existem ábacos para algumas distribuições diferentes).

OBSERVAÇÕES

1. Existem ábacos nos livros de P. B. Fusco, de W. Piel e de P. J. Monroya.
2. Para diferentes autores, pequenas diferenças podem ser encontradas nos ábacos.
3. Em princípio os procedimentos para uso dos ábacos são os mesmos, basta seguir a orientação indicada pelos autores.

9.12 – Disposições da NBR-6118

As exigências que se seguem referem-se a pilares cuja maior dimensão da seção transversal não exceda a cinco vezes a menor dimensão. Quando esta condição não for satisfeita, o pilar deve ser tratado como pilar-parde.

9.12.1 – Dimensões mínimas da seção transversal de pilares

A seção transversal dos pilares, qualquer-que-seja a sua forma, não deve apresentar dimensão menor que 19 cm.

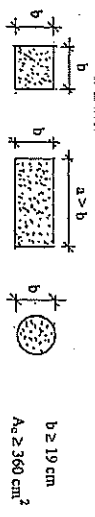


Figura 9.22 – Seções transversais de pilares de concreto

Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 12 cm e 19 cm, desde que se multipliquem as ações a serem consideradas no dimensionamento por um coeficiente adicional γ_n , além de γ_n , com:

$\gamma_n = 1,55 - 0,05 b$

onde b, em centímetros, é a menor dimensão da seção transversal do pilar.

Em qualquer caso não se permite pilar com seção transversal de área inferior a 360 cm².

9.12.2 – Armadura longitudinal

a) Taxa de armadura longitudinal

A área mínima de armadura longitudinal é $A_{c,min} = 0,15 (N_{sd} / f_{yd}) \geq 0,004 A_c$
 A área máxima de armadura longitudinal é $A_{c,max} = 0,08 A_c$

onde A_c é a área total da seção de armadura longitudinal e A_c é a área da seção transversal de concreto.

Esses limites decorre que a taxa de armadura longitudinal $\rho = A_s / A_c$ deve respeitar:

$$\rho_{min} = 0,15 \left[\frac{N_{s,d}}{A_c \cdot f_{td}} \right] \geq 0,004$$

$$\rho_{max} = 0,08$$

Esses limites também se aplicam às regiões de emendas por "traspasse" das barras.

b) Diâmetro das barras ϕ

$$\phi \geq 10 \text{ mm}$$

$\phi \leq 1/8$ da menor dimensão da seção

c) Arranjo transversal

- Em seções poligonais deve existir pelo menos uma barra em cada vértice.

- Em seções circulares deve existir no mínimo 6 barras distribuídas no perímetro.

d) Distância mínima livre entre barras

A distância livre entre barras (ou feixes) deve ser $\geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ 1,2 \cdot \phi_{max} \text{ do agregado} \end{cases}$

Esses limites também se aplicam às regiões de emendas por "traspasse" das barras.

e) Distância máxima entre eixos de barras na mesma fila

A distância entre eixos das barras deve ser $\leq \begin{cases} 2 \text{ vezes a maior dimensão da seção} \\ 40 \text{ cm} \end{cases}$

9.12.3 – Armadura transversal

a) Os estribos devem ser colocados em toda a altura do pilar e obrigatoriamente nos cruzamentos com vigas e lajes.

b) Os estribos devem ser de aço de categoria igual ou superior à do aço de armadura longitudinal.

c) Diâmetro dos estribos ϕ_s

$$\phi_s \geq \begin{cases} \phi / 4 & \text{(ou } \phi_{viga} / 4) \\ 5 \text{ mm} \end{cases}$$

d) Espaçamento entre estribos s

$$s \leq \begin{cases} 24 \cdot \phi_s & \text{para aço CA-25} \\ 12 \cdot \phi_s & \text{para aço CA-50} \end{cases}$$

menor dimensão da seção
20 cm

9.12.4 – Proteção contra a flambagem das barras longitudinais

a) Os estribos poligonais protegem contra a flambagem as barras longitudinais situadas em seus cantos e as por eles abrangidas e situadas no máximo à distância de $20 \cdot \phi$ do canto, se nesse trecho de comprimento $20 \cdot \phi$ não houver mais de duas barras, não contando a do canto.

b) Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deverá haver estribos suplementares com os mesmos diâmetro e espaçamento dos estribos principais.

c) Se esses estribos forem poligonais, a eles se aplica a regra enunciada em a).
d) Se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta, terminada em ganchos, deverá ela atravessar a largura do pilar e o seu gancho envolver a barra longitudinal. Se houver mais de uma barra longitudinal a serem protegidas, junto à mesma extremidade do estribo suplementar, o gancho deste deverá envolver o estribo principal em um ponto junto a uma das barras, o que deverá ser indicado no projeto de modo bem destacado. Ele garantirá contra a flambagem essa barra e mais duas para cada lado, não distantes dela mais que $20 \cdot \phi$.

A Figura 9.23 ilustra a aplicação dessas regras.

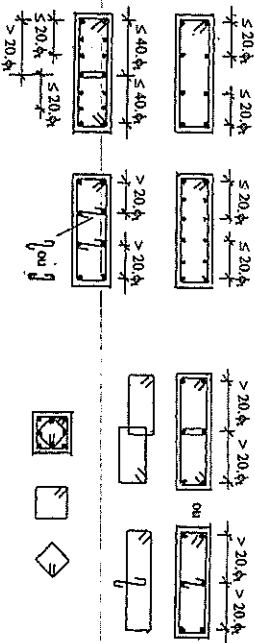


Figura 9.23 – Proteção das barras longitudinais contra a flambagem

9.12.5 – Arranjos de armadura

A Figura 9.24 mostra alguns arranjos de armaduras e detalhes para proteção das barras longitudinais contra a flambagem.

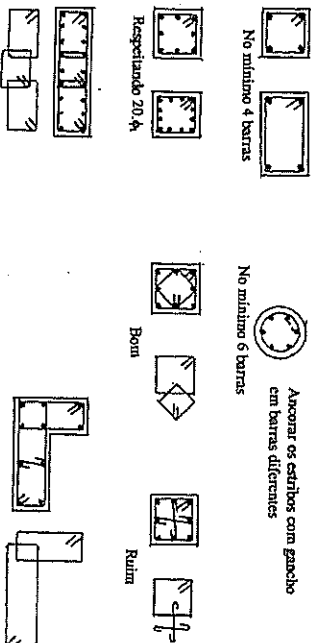


Figura 9.24 – Detalhes de armaduras de pilares

9.1.2.6 – Cobrimento das armaduras

O cobrimento das armaduras é sempre referido à superfície da armadura externa, em geral à face externa dos estribos.

Para garantir o cobrimento mínimo (c_{min}), o projeto e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc).

O cobrimento das armaduras dos pilares deve respeitar o cobrimento nominal indicado na Tabela 3.3 do Item 3.3.2 deste texto.

10 – ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

10.1 – Estados do concreto

O concreto não é um material elástico e seu diagrama tensão-deformação não é linear até a ruptura. Nas peças de concreto fletidas, em função do nível de tensão a que está submetido, o concreto passa por diferentes fases de comportamento denominadas estados do concreto.

A Figura 10.1 mostra um trecho de viga destacando a seção analisada submetida a um momento fletor M .

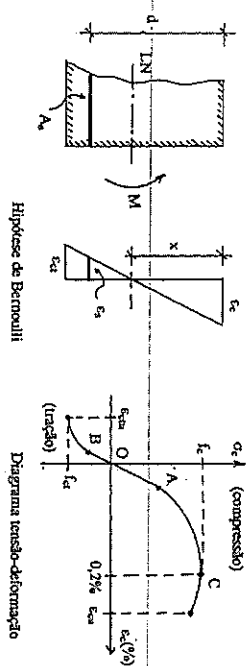


Figura 10.1 – Viga fletida e diagrama tensão-deformação do concreto

A mesma figura mostra também a distribuição de deformações na seção transversal em estudo, onde:

ϵ_c = encurtamento do concreto na borda comprimida da seção

ϵ_{ct} = alongamento do concreto na borda tracionada da seção

ϵ_s = alongamento da armadura tracionada

Essa distribuição de deformações é consequência da hipótese de Bernoulli que é válida também para peças de concreto armado, "as seções transversais inicialmente planas permanecerem planas e a deformação".

A Figura 10.1 mostra também o diagrama tensão-deformação do concreto na compressão e na tração obtido em ensaios de corpos-de-prova sob compressão uniforme e sob tração uniforme, respectivamente. O trecho OA na compressão (até aproximadamente 30% a 40% da resistência à compressão, f_c) e o trecho OB na tração são praticamente retilíneos. Por isso, nesses trechos AO e OB a tensão é proporcional à deformação e vale a lei de Hooke para a compressão e para a tração, respectivamente. Então:

$$\text{Em OA: } \sigma_c = E_c \cdot \epsilon_c$$

$$\text{Em OB: } \sigma_t = E_c \cdot \epsilon_t$$

A partir do ponto A na compressão e do ponto B na tração o diagrama toma-se curvo e, por isso, a tensão não é mais proporcional à deformação e não vale mais a lei de Hooke. Na compressão, para acréscimos de tensão além de σ_c é atingido o ponto C, cuja ordenada define a resistência do concreto à compressão, f_c . Para a deformação $\epsilon_c = 0,23\%$ e, após o trecho seguinte descendente, o diagrama termina no ponto que corresponde à deformação de ruptura do concreto na compressão, ϵ_{cu} , para uma tensão menor que f_c . Na tração, para acréscimos de tensão além de B, logo é atingido o ponto de máxima tensão que corresponde à resistência do concreto à tração, f_t , e ao alongamento de ruptura do concreto na tração, ϵ_{tu} .

Os estádios do concreto podem ser identificados nos vários trechos do diagrama tensão-deformação na Figura 10.1.

Estádio Ia: é a fase de comportamento do concreto em que ele resiste compressão e tração em regime elástico sem aparecimento de fissuras na região tracionada da seção. As tensões na região comprimida da seção correspondem ao trecho OA e as tensões na região tracionada da seção correspondem ao trecho OB no diagrama tensão-deformação da Figura 10.1. As tensões são proporcionais às deformações e vale a lei de Hooke para as regiões comprimida e tracionada ao mesmo tempo. Valendo a hipótese de Bernoulli e também a lei de Hooke, como decorrência, vale a lei de Navier e a distribuição de tensões na seção é linear tanto na região comprimida quanto na região tracionada da seção transversal. O estádio Ia se manifesta quando a sollicitação atuante é de baixa intensidade.

Estádio Ib: é a fase de comportamento do concreto em que ele resiste compressão em regime elástico e tração em regime plástico ainda sem aparecimento de fissuras na região tracionada da seção. As tensões na região comprimida da seção ainda correspondem ao trecho OA e as tensões na região tracionada da seção, já ultrapassaram aquela, correspondente ao ponto B. Os diagramas tensão-deformação da Figura 10.1. No lado comprimido da seção, as tensões são proporcionais às deformações e vale a lei de Hooke. Valendo a hipótese de Bernoulli e também a lei de Hooke, como decorrência, vale a lei de Navier e a distribuição de tensões na região comprimida da seção é linear. No lado tracionado, a distribuição de tensões é praticamente uniforme com tensão igual à resistência do concreto à tração, f_t , em quase toda a altura da região tracionada e aí não vale mais a lei de Hooke. O estádio Ib também se manifesta quando a sollicitação atuante é de baixa intensidade mas em nível mais alto que a do caso anterior.

Estádio II: é a fase de comportamento do concreto em que ele resiste compressão em regime elástico mas não resiste tração porque está fissurado na região tracionada da seção transversal. As tensões na região comprimida da seção ainda correspondem ao trecho OA no diagrama tensão-deformação da Figura 10.1. As tensões que existem no lado tracionado da seção, para manter o equilíbrio, seriam maiores que a resistência do concreto à tração, f_t . Por isso, o concreto da região tracionada fissura e os esforços de tração liberados pela fissuração devem ser e vale a lei de Hooke. Valendo a hipótese de Bernoulli e também a lei de Hooke, como decorrência, vale a lei de Navier e a distribuição de tensões na região comprimida da seção é linear. No lado tracionado, as tensões no concreto são nulas, por causa da fissuração, cabendo à armadura resistir as tensões que aparecem nesse lado. O estádio II se manifesta diante de sollicitações nas condições de serviço, isto é, em utilização.

Estádio III: é a situação de iminência da ruína em que o concreto resiste compressão em regime plástico mas não resiste tração porque está fissurado na região tracionada da seção. No lado comprimido da seção, as tensões nas fibras mais próximas da linha neutra ainda correspondem ao trecho OA no diagrama tensão-deformação, porque as deformações são pequenas, mas as tensões nas fibras mais distantes da linha neutra correspondem ao trecho curvo daquele diagrama, porque as deformações são maiores. A maior tensão de compressão, σ_c , ocorre na fibra cuja deformação vale 0,2%. Dessa fibra até a borda comprimida as tensões são menores que f_c e correspondem ao trecho descendente do diagrama tensão-deformação. No lado tracionado da seção o concreto está fissurado e as estirpões de tração devem ser resistidos por armadura. A ruptura da seção acontece quando a sollicitação atinge a deformação na borda comprimida de valor igual ao encurtamento de ruptura do concreto ϵ_{cu} , tomado convencionalmente como 0,35%. O estádio III se manifesta para sollicitações nas condições de ruptura, isto é, no estado limite de esgotamento da capacidade resistente do elemento estrutural.

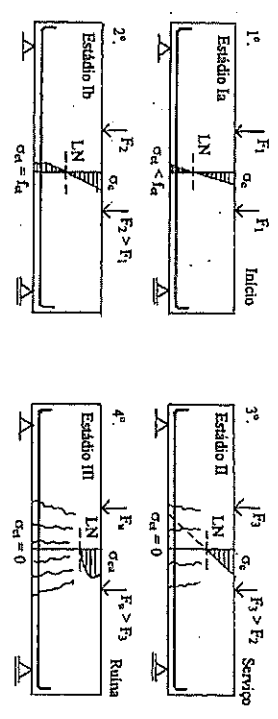


Figura 10.2 - Estádios do concreto

b) Situações por que passa o concreto em seções diferentes da mesma viga sob a carga que causa a ruptura da seção mais sollicitada.

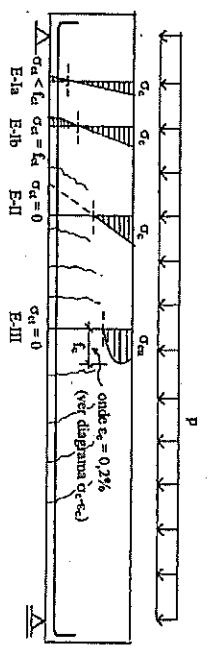


Figura 10.3 - Estádios do concreto

10.2 - Estádio Ia

- No estádio Ia são válidas as seguintes premissas:
- A hipótese de Bernoulli
 - A lei de Hooke para o concreto à compressão e à tração
 - A lei de Hooke para o aço
 - A relação $\sigma_c = E_s / E_c = 10$

onde:
 E_s = módulo de elasticidade do aço
 E_c = módulo de elasticidade do concreto

Portanto é válida a lei de Navier (distribuição linear de tensões na seção).
 A seção transversal é heterogênea pois é constituída por dois materiais: concreto e aço.
 Os princípios da Resistência dos Materiais são válidos no estádio Ia desde que a seção seja homogênea.

10.2.1 – Seção homogênea (ou seção ideal) no estádio Ia

A Figura 10.4 mostra uma seção transversal de concreto armado submetida à flexão no estádio Ia.

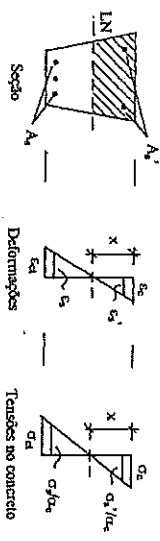


Figura 10.4 – Viga de concreto armado flechada no estádio Ia

Devido à aderência, a deformação ϵ_s na armadura é igual à deformação ϵ_{cd} no concreto na posição em que está a armadura:
 $\epsilon_s = \epsilon_{cd}$ na altura em que está a armadura

A tensão σ_{cd} de tração no concreto na altura em que está a armadura vale:
 $\sigma_{cd} = E_c \cdot \epsilon_{cd}$ lei de Hooke para o concreto na tração

Também vale para a armadura:
 $\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$ lei de Hooke para o aço na tração

Como $\epsilon_s = \epsilon_{cd}$ na altura em que está a armadura, resulta:
 $\sigma_s / \alpha \epsilon = E_s / E_c = \alpha \epsilon$

Dal conclui-se que a tensão σ_s na armadura tracionada é $\alpha \epsilon$ vezes maior que a tensão σ_{cd} de tração no concreto na altura em que está essa armadura:
 $\sigma_s = \alpha \epsilon \cdot \sigma_{cd}$

Portanto, na posição da armadura tracionada, o efeito de σ_s atuando sobre a área de armadura A_s é o mesmo de σ_{cd} atuando sobre uma área de concreto igual a $\alpha \epsilon \cdot A_s$ se, em lugar de armadura houvesse concreto.

O mesmo raciocínio se aplica à região comprimida da seção e a mesma relação vale para a tensão σ_c na armadura comprimida:
 $\sigma_c = \alpha \epsilon \cdot \sigma_c$

onde σ_c é a tensão de compressão no concreto na altura em que está a armadura de área A_s' .
 Portanto, na posição da armadura comprimida, o efeito de σ_c atuando sobre a área de armadura A_s' é o mesmo de σ_{cd} atuando sobre uma área de concreto igual a $\alpha \epsilon \cdot A_s'$ se, em lugar de armadura houvesse concreto.

Conclusão: a seção de concreto armado constituída por concreto e aço (dois materiais) pode ser transformada numa seção equivalente só de concreto (um só material) constituída pelo concreto existente e por concreto com área $\alpha \epsilon$ vezes as áreas de armadura em lugar delas.

A seção assim obtida é denominada seção homogênea ou seção ideal no estádio Ia.
 A área da seção homogênea no estádio Ia, mostrada na Figura 10.5 vale:

$$A_c = A_c + (\alpha \epsilon - 1) (A_s + A_s')$$

onde:

- A_c = área da seção homogênea
- A_c = área da seção bruta de concreto
- A_s = área da seção de armadura tracionada
- A_s' = área da seção de armadura comprimida
- $\alpha \epsilon = E_s / E_c = 10$ (coeficiente de equivalência)

No caso de armadura simples, a área da seção homogênea no estádio Ia vale:

$$A_c = A_c + (\alpha \epsilon - 1) A_s$$

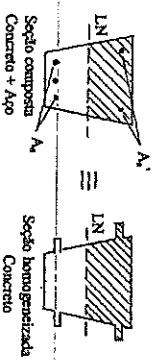


Figura 10.5 – Seção homogênea no estádio Ia

10.2.2 – Aplicação do estádio Ia

O cálculo no estádio Ia é empregado no cálculo de deformações (flechas) em lajes de concreto armado. Neste caso aplica-se o estádio Ia.

A Figura 10.6 apresenta uma seção retangular submetida à flexão normal simples no estádio Ia.

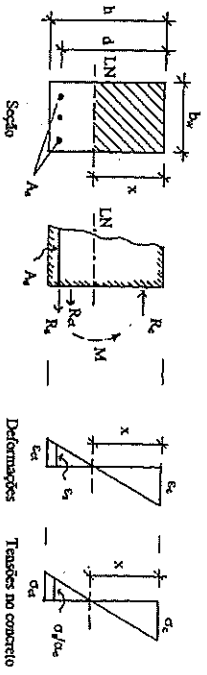


Figura 10.6 – Seção retangular sob flexão normal simples no estádio Ia

- Posição da linha neutra na seção homogênea:

$$x = \frac{b_w h^2 / 2 + (\alpha \epsilon - 1) A_s d}{b_w h + (\alpha \epsilon - 1) A_s}$$

(com $\alpha \epsilon = 10$)

Momento de inércia da seção homogeneizada:

$$I_1 = b_w \frac{x^3 + (h-x)^3}{3} + (\alpha_e - 1) A_s (d-x)^2 \quad (\text{com } \alpha_e = 10)$$

armadura e admitir o plano neutro à meia altura da seção. Então:

$$E_1 I = E_s b_w h^3 / 12 \text{ para lajes armadas em uma direção}$$

$$D = E_s h^3 / [12(1 - \nu^2)] \text{ para lajes armadas em duas direções } (\nu = \text{coef. de Poisson})$$

10.3 – Estádio II

No estágio II são válidas as seguintes premissas:

- A hipótese de Bernoulli;
- A resistência do concreto à tração é nula (o concreto está fissurado)
- A lei de Hooke para o concreto à compressão
- A lei de Hooke para o aço
- A relação $\alpha_g = E_s / E_c = 15$

onde:

E_s = módulo de elasticidade do aço
 E_c = módulo de elasticidade do concreto

Portanto é válida a lei de Navier para concreto no lado comprimido da seção (distribuição linear de tensões na região comprimida da seção).

A seção transversal é heterogênea pois é constituída por dois materiais: concreto e aço. Os princípios da Resistência dos Materiais são válidos no estágio II desde que a seção seja homogeneizada.

10.3.1 – Seção homogeneizada (ou seção ideal) no estágio II

A Figura 10.7 mostra uma seção transversal de concreto armado submetida à flexão no estágio II.

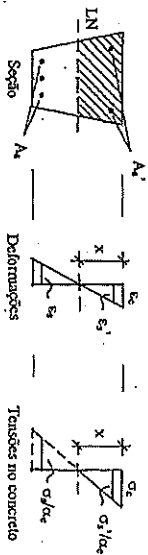


Figura 10.7 – Viga de concreto armado fleída no estágio II

Aplica-se no estágio II o mesmo raciocínio exposto no item 10.2.1 para o estágio Ia. A única modificação que deve ser feita é a seguinte:

No estágio II só se considera da seção de concreto a região comprimida, porque o concreto da região tracionada está fissurado.

Conclusão: a seção de concreto armado constituída por concreto e aço (dois materiais) pode ser transformada numa seção equivalente só de concreto (um só material) constituída pelo concreto da região comprimida e por concreto com área α_e vezes as áreas de armadura em lugar delas.

Momento de inércia da seção homogeneizada:

$$I_1 = b_w \frac{x^3 + (h-x)^3}{3} + (\alpha_e - 1) A_s (d-x)^2 \quad (\text{com } \alpha_e = 10)$$

armadura e admitir o plano neutro à meia altura da seção. Então:

$$E_1 I = E_s b_w h^3 / 12 \text{ para lajes armadas em uma direção}$$

$$D = E_s h^3 / [12(1 - \nu^2)] \text{ para lajes armadas em duas direções } (\nu = \text{coef. de Poisson})$$

10.3 – Estádio II

No estágio II são válidas as seguintes premissas:

- A hipótese de Bernoulli;
- A resistência do concreto à tração é nula (o concreto está fissurado)
- A lei de Hooke para o concreto à compressão
- A lei de Hooke para o aço
- A relação $\alpha_g = E_s / E_c = 15$

onde:

E_s = módulo de elasticidade do aço
 E_c = módulo de elasticidade do concreto

Portanto é válida a lei de Navier para concreto no lado comprimido da seção (distribuição linear de tensões na região comprimida da seção).

A seção transversal é heterogênea pois é constituída por dois materiais: concreto e aço. Os princípios da Resistência dos Materiais são válidos no estágio II desde que a seção seja homogeneizada.

10.3.1 – Seção homogeneizada (ou seção ideal) no estágio II

A Figura 10.7 mostra uma seção transversal de concreto armado submetida à flexão no estágio II.

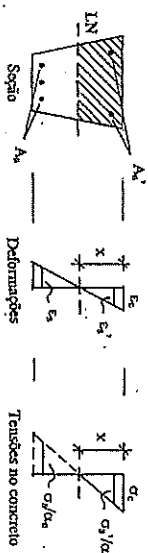


Figura 10.7 – Viga de concreto armado fleída no estágio II

Aplica-se no estágio II o mesmo raciocínio exposto no item 10.2.1 para o estágio Ia. A única modificação que deve ser feita é a seguinte:

No estágio II só se considera da seção de concreto a região comprimida, porque o concreto da região tracionada está fissurado.

Conclusão: a seção de concreto armado constituída por concreto e aço (dois materiais) pode ser transformada numa seção equivalente só de concreto (um só material) constituída pelo concreto da região comprimida e por concreto com área α_e vezes as áreas de armadura em lugar delas.

A seção assim oblida é denominada **seção homogeneizada** ou **seção ideal** no estágio II. A área da seção homogeneizada no estágio II, mostrada na Figura 10.8 vale:

$$A_{oi} = A_{cc} + \alpha_e (A_s + A_s')$$

onde:

A_{oi} = área da seção homogeneizada

A_{cc} = área da região comprimida da seção de concreto

A_s = área da seção de armadura tracionada

A_s' = área da seção de armadura comprimida

$\alpha_e = E_s / E_c = 15$ (coeficiente de equivalência)

No caso de armadura simples, a área da seção homogeneizada no estágio II vale:

$$A_{oi} = A_{cc} + \alpha_e A_s$$

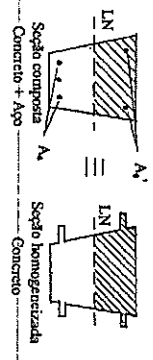


Figura 10.8 – Seção homogeneizada no estágio II

OBSERVAÇÃO: No estágio II, depois da fissuração do concreto, as deformações dependem do módulo de deformação do concreto da região comprimida, E_c . Por isso, $\alpha_e = 15$ se ajusta bem, conforme a prática demonstra.

10.3.2 – Aplicações do estágio II

O cálculo no estágio II é empregado na verificação de deformações (flechas) em vigas de concreto armado e na verificação da fissuração nas condições de utilização.

a) Seção retangular

A Figura 10.9 apresenta uma seção retangular sob flexão normal simples no estágio II.

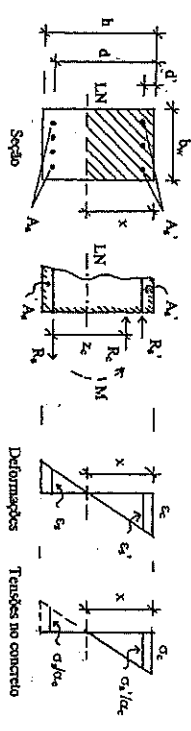


Figura 10.9 – Seção retangular sob flexão normal simples no estágio II

- Posição da linha neutra na seção homogeneizada:

$$x = \frac{\alpha_e A_s}{b_w} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b_w d}{\alpha_e A_s}} \right] \quad \text{seção com armadura simples}$$

$$x = \frac{\alpha_e (A_s + A_s')}{b_w} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b_w d_o}{\alpha_e (A_s + A_s')}} \right] \quad \text{seção com armadura dupla}$$

$$d_o = \frac{A_{s2} d + A_{s1} d'}{A_s + A_s'}$$

- Momento de inércia da seção homogeneizada:

$$I_i = b_w x^3 / 3 + \alpha_e A_s (d - x)^2 \quad \text{seção com armadura simples}$$

$$I_i = b_w x^3 / 3 + \alpha_e A_{s2} (d - x)^2 + \alpha_e A_{s1} (x - d')^2 \quad \text{seção com armadura dupla}$$

- Verificação das tensões:

$$\sigma_c = (M / I_i) x \quad \text{tensão no concreto da borda comprimida}$$

$$\sigma_s = \alpha_e (M / I_i) (d - x) \quad \text{tensão na armadura tracionada}$$

$$\sigma_s' = \alpha_e (M / I_i) (x - d') \quad \text{tensão na armadura comprimida}$$

b) Seção T

1º Caso: a linha neutra corta a mesa, isto é, $x \leq h_f$

A seção T comporta-se como retangular de largura b_f . As expressões anteriores para as seções retangulares são válidas para a seção T, tomando-se b_f em lugar de b_w .

2º Caso: a linha neutra corta a nervura, isto é, $x > h_f$

Se com as expressões das seções retangulares com b_f em lugar de b_w resultar $x > h_f$, conclui-se que a linha neutra corta a nervura e então o valor de x deverá ser recalculado como indicado a seguir:

- Posição da linha neutra da seção homogeneizada:

Procede-se como se a seção fosse retangular com largura b_w , com a mesma armadura da seção T e ainda com uma barra de armadura fictícia de área $A_s''(fict) = (b_f - b_w) h_f / \alpha_e$ colocada no eixo da nervura a uma distância $h_f / 2$ da borda comprimida.

Calcula-se x como se a seção fosse retangular com largura b_w e armaduras de áreas A_s , A_s' e $A_{s'}'(f_{icd})$:

$$x = \frac{\alpha_e [A_s + A_s' + A_s'(f_{icd})]}{b_w} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b_w d_o}{\alpha_e [A_s + A_s' + A_s'(f_{icd})]}} \right]$$

$$d_o = \frac{A_s d + A_s' d' + A_s'(f_{icd}) (h/2)}{A_s + A_s' + A_s'(f_{icd})}$$

- Momento de inércia da seção homogeneizada

$$I_i = b_w x^3 / 3 - (b_w - b_w)(x - h_w)^3 / 3 + \alpha_e A_s (d - x)^2 + \alpha_e A_s' (x - d')^2$$

- No caso de armadura simples, fazer $A_s' = 0$ nas expressões acima

$$\sigma_c = (M / I_i) x$$

$$\sigma_s = \alpha_e (M / I_i) (d - x)$$

$$\sigma_s' = \alpha_e (M / I_i) (x - d')$$

tensão no concreto da borda comprimida
tensão na armadura traçãoada
tensão na armadura comprimida

10.4 – Estado limite de abertura de fissuras

10.4.1 – Aberturas máximas características de fissuras

Conforme a classe de agressividade do ambiente, considera-se que a fissuração é notável quando a abertura característica máxima, w_k , das fissuras ultrapassa os valores indicados na Tabela 10.1.

Tabela 10.1 – Aberturas características máximas de fissuras

Classe de agressividade do ambiente	Tipo de ambiente	Abertura máxima característica das fissuras
I	Rural Submersa	$w_k \leq 0,4$ mm
II	Urbana	$w_k \leq 0,3$ mm
III	Mãinha Industrial	$w_k \leq 0,3$ mm
IV	Industrial Respingos de maré	$w_k \leq 0,2$ mm

Supõe-se que, com razoável probabilidade, a condição acima ocorre quando a menor das aberturas de fissuras, w , entre as calculadas pelas expressões abaixo ultrapassa o limite pertencente à classe de agressividade do ambiente correspondente:

$$w = \frac{\phi}{12,5 \cdot \eta_1} \frac{\sigma_s}{E_s} \frac{3 \sigma_s}{f_{ctm}} = \frac{\phi}{12,5 \cdot \eta_1} \frac{\sigma_s}{E_s} \left[\frac{4}{f_x} + 45 \right]$$

onde: ϕ = diâmetro das barras em mm

σ_s = tensão de tração na armadura considerada, calculada no estado II com $\alpha_e = 15$ e as ações de cálculo indicadas no item 10.4.2

η_1 = coeficiente de conformação superficial das barras (η_1 é um índice que quantifica o grau de aderência das barras com o concreto)

- $\eta_1 = 1,0$ para CA-25
- $\eta_1 = 1,4$ para CA-60
- $\eta_1 = 2,25$ para CA-50

E_s = módulo de elasticidade do aço

$$E_s = 210.000 \text{ MPa}$$

f_{ctm} = resistência média do concreto à tração

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \text{ (MPa)} \quad \text{com } f_{ck} \text{ (MPa)}$$

p_r = taxa geométrica de armadura na seção transversal de concreto de área A_{cr} interessada pela fissuração, indicada no item 10.4.3

$$p_r = A_s / A_{cr}$$

10.4.2 – Ação de cálculo a considerar na verificação da fissuração

$$F_d = F_{gk} + \psi_1 \cdot F_{qk}$$

onde: F_{gk} = valor característico das ações permanentes

F_{qk} = valor característico das ações variáveis

$\psi_1 = 0,4$ para edifícios residenciais

$\psi_1 = 0,6$ para edifícios comerciais e industriais

$\psi_1 = 0,7$ para bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens

10.4.3 – Área de concreto interessada pela fissuração: A_{cr}

Para cada elemento ou grupo de elemento das armaduras, será considerada uma área A_{cr} do concreto de envolvimento, constituída por retângulo cujos lados não distam mais que 7,5 ϕ do contorno do elemento da armadura, como mostra a Figura 10.10.

A verificação da fissuração será feita para cada área de envolvimento.

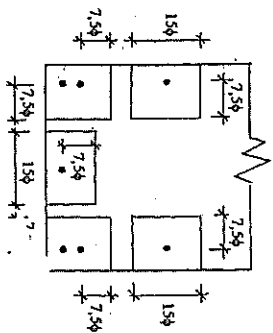


Figura 10.10 – Área de concreto interessada pela fissuração

10.5 – Estado limite de deformação excessiva

No projeto, especial atenção deverá ser dada à verificação da possibilidade de estado de deformação excessiva, a fim de que as deformações não possam ser prejudiciais à estrutura ou a outras partes da construção. Salvo cálculo rigoroso, a determinação das deformações nas peças feitas deverá ser feita considerando o estado I apenas para as lajes e o estado II modificado para as vigas.

10.5.1 – Deslocamentos limites

Deslocamentos limites são valores resultantes da prática utilizados para verificação em serviço do estado limite de deformação excessiva das estruturas. Nas lajes e nas vigas das estruturas de concreto dos edifícios, deverão ser obedecidas as seguintes limitações:

- As flechas medidas a partir dos planos que contêm os apoios, quando atuarem todas as ações (carga total), não ultrapassarão $l/250$.
- Os deslocamentos causados pelas ações variáveis (cargas acidentais) não serão maiores que $l/350$.
- Em lajes ou vigas que suportarem paredes ou caixilhos, os deslocamentos ocorridos após a sua construção ou instalação não excederão $l/500$ e 10 mm.

Nas vigas, l é o vão teórico do tramo considerado, exceto no caso de balanços para os quais l é o dobro do comprimento teórico. Nas lajes, l é o menor vão teórico, exceto no caso de lajes que suportam paredes para as quais l é o vão na direção da parede, mas não maior que o dobro do vão menor.

10.5.2 – Ação de cálculo a considerar na verificação de deformações

$$F_d = F_{gk} + \psi_2 F_{qk}$$

onde:

F_{gk} = valor característico das ações permanentes

F_{qk} = valor característico das ações variáveis

$\psi_2 = 0,3$ para edifícios residenciais

$\psi_2 = 0,4$ para edifícios comerciais e industriais

$\psi_2 = 0,6$ para bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens

10.5.3 – Momento de fissuração

Nos estados limites de utilização as estruturas funcionam parcialmente no estado I e parcialmente no estado II. A separação entre as regiões que correspondem a essas duas situações é definida pelo momento de fissuração, M_f . Para verificação de deformações, esse momento pode ser calculado de modo aproximado pela expressão:

$$M_f = \frac{\alpha \cdot f_{cm} \cdot l_c}{\gamma_1}$$

onde:

α = fator que correlaciona de modo aproximado a resistência do concreto à tração na flexão com a resistência à tração direta

$\alpha = 1,2$ para seções T ou duplo T

$\alpha = 1,0$ para seções retangulares

γ_1 = distância do centro de gravidade da seção até a fibra mais tracionada

l_c = momento de inércia da seção bruta de concreto

f_{cm} = resistência média do concreto à tração

$f_{cm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$ (MPa) com f_{ck} (MPa)

10.5.4 – Flecha imediata em vigas de concreto armado

Quando a deformação lenta (fluência) for nula ou desprezível, por serem as ações de curta duração, uma avaliação aproximada da flecha imediata em vigas pode ser realizada utilizando-se a expressão do produto de rigidez equivalente dada a seguir:

$$(E_s)_eq = E_s \left\{ \left(\frac{M_1}{M_0} \right)^3 \cdot l_c + \left[1 - \left(\frac{M_1}{M_0} \right) \right] \cdot l_{II} \right\} \leq E_s \cdot l_c$$

onde:

l_c = momento de inércia da seção bruta de concreto

l_{II} = momento de inércia da seção fissurada no estado II calculado com $\sigma_g = E_s / E_{sq}$

M_1 = momento de fissuração do elemento estrutural cujo valor deve ser reduzido à medida no caso de utilização de barras lisas

M_0 = momento fletor na seção crítica do vão considerado (momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços) para a combinação de ações considerada

E_{sq} = módulo de deformação secante do concreto

$E_{sq} = 4760 \sqrt{f_{ck}}$ (MPa) com f_{ck} (MPa)

E_s = módulo de elasticidade do aço

$E_s = 210.000$ MPa

10.5.5 – Flecha diferida no tempo para vigas de concreto armado

Flecha diferida no tempo é o acréscimo de deformação sobre a flecha imediata, decorrente do efeito da fluência, que se manifesta com o tempo na presença de cargas de longa duração.

A flecha adicional diferida, decorrente das cargas de longa duração em função da fluência, pode ser calculada pela multiplicação da flecha imediata pelo coeficiente α_f dado pela expressão:

$$\alpha_f = \frac{\Delta f}{f + 50, p'}$$

onde:

$$p' = \frac{A_s'}{b_w \cdot d}$$

$$\Delta f = f(t) - f(t_0)$$

$f(t)$ = coeficiente que é função do tempo

$$f(t) = 0,68 (0,996^t) \cdot t^{0,32} \quad \text{para } t \leq 70 \text{ meses}$$

$$f(t) = 2 \quad \text{para } t > 70 \text{ meses}$$

onde:

t = idade, em meses, na qual se deseja o valor da flecha final

t_0 = idade, em meses, correspondente a data de aplicação da carga de longa duração

A flecha final será a flecha imediata multiplicada por $(1 + \alpha_f)$.

ANEXOS

CA-25 e CA-50 ÁREA DA SEÇÃO DE ARMADURA PARA BARRAS (cm²)

DIÂMETRO	MASSA LINEAR	NÚMERO DE BARRAS							
		1	2	3	4	5	6	7	8
5,0	0,16	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60
6,3	0,25	0,32	0,63	0,95	1,25	1,58	1,89	2,20	2,52
8,0	0,40	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,50	4,00	4,00
10,0	0,63	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40
12,5	1,00	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00
16,0	1,60	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00
20,0	2,50	3,15	6,30	9,45	12,60	15,75	18,90	22,05	25,20
22,0	3,00	3,80	7,60	11,40	15,20	19,00	22,80	26,60	30,40
25,0	4,00	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00
32,0	6,30	8,00	16,00	24,00	32,00	40,00	48,00	56,00	64,00
40,0	10,00	12,50	25,00	37,50	50,00	62,50	75,00	87,50	100,00

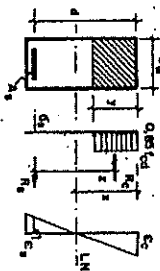
CA-60 ÁREA DA SEÇÃO DE ARMADURA PARA FIOS (cm²)

DIÂMETRO	MASSA LINEAR	NÚMERO DE BARRAS							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2,4	0,036	0,045	0,090	0,135	0,180	0,225	0,270	0,315	0,360
3,4	0,071	0,091	0,182	0,273	0,364	0,455	0,546	0,637	0,728
3,8	0,089	0,113	0,226	0,339	0,452	0,565	0,678	0,791	0,904
4,2	0,109	0,139	0,278	0,417	0,556	0,695	0,834	0,973	1,112
4,6	0,130	0,166	0,332	0,498	0,664	0,830	0,996	1,162	1,328
5,0	0,154	0,196	0,392	0,588	0,784	0,980	1,176	1,372	1,568
5,5	0,187	0,238	0,476	0,714	0,952	1,190	1,428	1,666	1,904
6,0	0,222	0,283	0,566	0,849	1,132	1,415	1,698	1,981	2,264
6,4	0,253	0,322	0,644	0,966	1,288	1,610	1,932	2,254	2,576
7,0	0,302	0,385	0,770	1,155	1,540	1,925	2,310	2,695	3,080
8,0	0,395	0,503	1,006	1,509	2,012	2,515	3,018	3,521	4,024
9,5	0,558	0,709	1,418	2,127	2,836	3,545	4,254	4,963	5,672
10,0	0,617	0,785	1,570	2,355	3,140	3,925	4,710	5,495	6,280

FLEXÃO NORMAL SIMPLES - ESTADO LIMITE ÚLTIMO
VALORES DE k_c E k_s

UNIDADES kN, cm

$\beta_c = v/d$	$k_c = b_w d^2 / M_{sd}$					k_s		
	20	25	30	35	40	CA-25	CA-50	CA-60
0,02	51,9	41,5	34,6	29,6	25,9	0,046	0,023	0,019
0,04	26,1	20,9	17,4	14,9	13,1	0,047	0,023	0,019
0,06	17,6	14,1	11,7	10,0	8,8	0,047	0,024	0,020
0,08	13,3	10,6	8,9	10,6	6,6	0,048	0,024	0,020
0,10	10,7	8,6	7,1	6,1	5,4	0,048	0,024	0,020
0,12	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	0,048	0,024	0,020
0,14	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	0,049	0,024	0,020
0,16	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	0,049	0,024	0,020
0,18	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	0,050	0,025	0,021
0,20	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	0,050	0,025	0,021
0,22	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	0,050	0,025	0,021
0,24	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	0,051	0,025	0,021
0,26	4,4	3,5	2,9	2,5	2,2	0,051	0,025	0,021
0,28	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	0,052	0,025	0,022
0,30	3,9	3,1	2,6	2,2	1,9	0,052	0,025	0,022
0,32	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	0,053	0,025	0,022
0,34	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	0,053	0,027	0,022
0,36	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	0,054	0,027	0,023
0,38	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	0,054	0,027	0,023
0,40	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	0,055	0,027	0,023
0,42	2,9	2,4	2,0	1,7	1,5	0,055	0,028	0,023
0,44	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	0,056	0,028	0,023
0,46	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	0,056	0,028	0,023
0,48	2,6	2,1	1,8	1,5	1,3	0,057	0,028	0,023
0,50	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	0,057	0,029	0,023

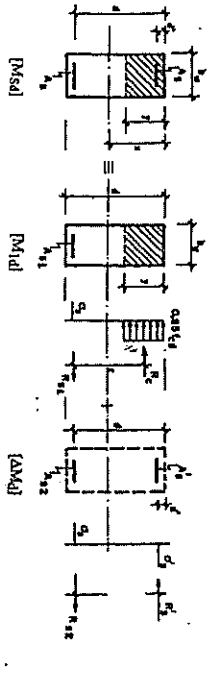


$y = 0,8x$ $\gamma_s = 1,4$
 $z = d - y/2$ $\gamma_s = 1,15$
 $M_{sd} = b_w d^2 / k_c$
 $A_s = k_s M_{sd} / d$

— OBSERVAÇÃO: Para $\gamma_s \neq 1,4$ multiplicar b_w por $1,4 / \gamma_s$ antes de usar a tabela.

FLEXÃO NORMAL SIMPLES - ESTADO LIMITE ÚLTIMO

UNIDADES KN, cm



$M_{sd} = M_{1,d} + \Delta M_d$

$A_s = A_{s1} + A_{s2}$

$A_s = k_2 M_{1,d} / d + k_2 \Delta M_d / (d - d')$

$M_{1,d}$ = momento resistido pela seção com armadura simples

$A_{s1} = k_1 M_{1,d} / d$
 $A_{s2} = k_2 \Delta M_d / (d - d')$

$\gamma_s = 1,15$

VALORES DE k_2

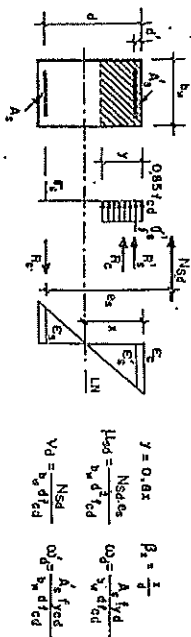
$\beta_x = x/d$	CA-25	CA-50	CA-60
$\leq \beta_{lim}$	0,046	0,073	0,019

VALORES DE k_1

$\beta_x = x/d$	CA-25					CA-50					CA-60				
	Para valores de η					Para valores de η					Para valores de η				
0,28	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,024	0,029	0,023	0,024	0,025	0,029	
0,30	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,027	0,023	0,023	0,024	0,026	
0,32	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,026	0,023	0,023	0,023	0,026	
0,34	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,024	0,023	0,023	0,023	0,025	
0,36	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023	0,024	
0,38	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,40	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,42	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,44	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,46	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,48	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,50	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,52	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,54	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,56	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	
0,57	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,023	0,023	0,023	0,023	0,021	0,022	0,022	0,023	0,024	

FLEXÃO NORMAL SIMPLES E COMPOSTA - ESTADO LIMITE ÚLTIMO

DOMÍNIOS 2, 3 E 4



$\gamma = 0,8x$
 $\beta_s = \frac{1}{2}$
 $M_{sd} = \frac{N_{sd} \cdot e_s}{b_s \cdot d' \cdot d}$
 $V_d = \frac{N_{sd}}{b_s \cdot d' \cdot d}$
 $\omega = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{b_s \cdot d' \cdot d}$

$\beta_x = x/d$	DOMÍNIO 2			DOMÍNIO 3			DOMÍNIO 4		
	μ	ω	CA-60	μ	ω	CA-25	μ	ω	CA-50
0,02	0,014	0,014		0,303	0,304		0,58	0,58	
0,04	0,027	0,027		0,296	0,401		0,58	0,58	
0,06	0,040	0,041		0,290	0,408		0,58	0,58	
0,08	0,052	0,054		0,284	0,415		0,58	0,58	
0,10	0,065	0,068		0,278	0,422		0,58	0,58	
0,12	0,078	0,082		0,272	0,428		0,58	0,58	
0,14	0,090	0,095		0,266	0,435		0,58	0,58	
0,16	0,102	0,109		0,260	0,442		0,58	0,58	
0,18	0,113	0,122		0,254	0,449		0,58	0,58	
0,20	0,125	0,133		0,248	0,456		0,58	0,58	
0,22	0,137	0,150		0,242	0,462		0,58	0,58	
0,24	0,147	0,165		0,236	0,469		0,58	0,58	
0,26	0,158	0,177		0,230	0,476		0,58	0,58	
0,28	0,169	0,190		0,224	0,483		0,58	0,58	
0,30	0,174	0,197		0,218	0,490		0,58	0,58	
0,32	0,180	0,204		0,212	0,496		0,58	0,58	
0,34	0,185	0,211		0,206	0,503		0,58	0,58	
0,36	0,190	0,218		0,200	0,510		0,58	0,58	
0,38	0,194	0,224		0,194	0,517		0,58	0,58	
0,40	0,200	0,231		0,188	0,524		0,58	0,58	
0,42	0,205	0,238		0,182	0,530		0,58	0,58	
0,44	0,210	0,245		0,176	0,537		0,58	0,58	
0,46	0,215	0,252		0,170	0,544		0,58	0,58	
0,48	0,219	0,258		0,164	0,551		0,58	0,58	
0,50	0,224	0,265		0,158	0,558		0,58	0,58	
0,52	0,228	0,272		0,152	0,564		0,58	0,58	
0,54	0,233	0,279		0,146	0,571		0,58	0,58	
0,56	0,238	0,286		0,140	0,578		0,58	0,58	
0,58	0,242	0,292		0,134	0,585		0,58	0,58	
0,60	0,246	0,299		0,128	0,592		0,58	0,58	
0,62	0,251	0,305		0,122	0,599		0,58	0,58	
0,64	0,255	0,311		0,116	0,605		0,58	0,58	
0,66	0,259	0,317		0,110	0,612		0,58	0,58	
0,68	0,263	0,323		0,104	0,619		0,58	0,58	
0,70	0,268	0,329		0,098	0,625		0,58	0,58	
0,72	0,272	0,335		0,092	0,632		0,58	0,58	
0,74	0,277	0,341		0,086	0,639		0,58	0,58	
0,76	0,281	0,347		0,080	0,645		0,58	0,58	
0,78	0,285	0,353		0,074	0,652		0,58	0,58	
0,80	0,290	0,359		0,068	0,659		0,58	0,58	
0,82	0,294	0,365		0,062	0,666		0,58	0,58	
0,84	0,298	0,371		0,056	0,673		0,58	0,58	
0,86	0,302	0,377		0,050	0,680		0,58	0,58	
0,88	0,306	0,383		0,044	0,687		0,58	0,58	
0,90	0,310	0,389		0,038	0,694		0,58	0,58	
0,92	0,314	0,395		0,032	0,701		0,58	0,58	
0,94	0,318	0,401		0,026	0,708		0,58	0,58	
0,96	0,322	0,407		0,020	0,715		0,58	0,58	
0,98	0,326	0,413		0,014	0,722		0,58	0,58	
1,00	0,330	0,419		0,008	0,729		0,58	0,58	

FLEXÃO NORMAL SIMPLES E COMPOSTA - ESTADO LIMITE ÚLTIMO

DOMÍNIOS 2, 3 E 4

Valores da relação σ_s / f_{sd}

$\beta_k = \psi/d$	CA-25	CA-50	CA-60
0,02	1,000	1,000	1,000
0,04	1,000	1,000	1,000
0,06	1,000	1,000	1,000
0,08	1,000	1,000	1,000
0,10	1,000	1,000	1,000
0,12	1,000	1,000	1,000
0,14	1,000	1,000	1,000
0,16	1,000	1,000	1,000
0,18	1,000	1,000	1,000
0,20	1,000	1,000	1,000
0,22	1,000	1,000	1,000
0,24	1,000	1,000	1,000
0,26	1,000	1,000	1,000
0,28	1,000	1,000	1,000
0,30	1,000	1,000	1,000
0,32	1,000	1,000	1,000
0,34	1,000	1,000	1,000
0,36	1,000	1,000	1,000
0,38	1,000	1,000	1,000
0,40	1,000	1,000	1,000
0,42	1,000	1,000	1,000
0,44	1,000	1,000	1,000
0,46	1,000	1,000	1,000
0,48	1,000	1,000	1,000
0,50	1,000	1,000	1,000
0,52	1,000	1,000	1,000
0,54	1,000	1,000	1,000
0,55	1,000	1,000	1,000
0,57	1,000	1,000	1,000

$\beta_k = \psi/d$	CA-25	CA-50	CA-60
0,58	1,000	1,000	0,850
0,59	1,000	1,000	0,838
0,60	1,000	1,000	0,826
0,61	1,000	1,000	0,814
0,62	1,000	1,000	0,801
0,63	1,000	0,993	0,787
0,64	1,000	0,982	0,773
0,65	1,000	0,969	0,756
0,66	1,000	0,871	0,738
0,67	1,000	0,834	0,717
0,68	1,000	0,795	0,694
0,69	1,000	0,759	0,673
0,70	1,000	0,725	0,655
0,71	1,000	0,693	0,638
0,72	1,000	0,662	0,622
0,73	1,000	0,632	0,606
0,74	1,000	0,603	0,591
0,75	1,000	0,574	0,576
0,76	1,000	0,546	0,561
0,77	1,000	0,519	0,546
0,78	1,000	0,492	0,531
0,79	1,000	0,466	0,516
0,80	1,000	0,440	0,501
0,81	1,000	0,414	0,486
0,82	1,000	0,388	0,471
0,83	1,000	0,362	0,456
0,84	1,000	0,336	0,441
0,85	1,000	0,310	0,426
0,86	1,000	0,284	0,411
0,87	1,000	0,258	0,396
0,88	1,000	0,232	0,381
0,89	1,000	0,206	0,366
0,90	1,000	0,180	0,351
0,91	1,000	0,154	0,336
0,92	1,000	0,128	0,321
0,93	1,000	0,102	0,306
0,94	1,000	0,076	0,291
0,95	1,000	0,050	0,276
0,96	1,000	0,024	0,261
0,97	1,000	0,000	0,246
0,98	1,000	0,000	0,231
0,99	1,000	0,000	0,216
1,00	1,000	0,000	0,201

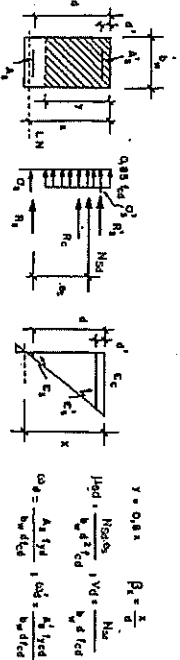
FLEXÃO NORMAL SIMPLES E COMPOSTA - ESTADO LIMITE ÚLTIMO

DOMÍNIOS 2, 3 E 4

Valores da relação σ_s' / f_{sd}

$\beta_k = \psi/d$	Para valores de n				Para valores de n				Para valores de n			
	0,05	0,08	0,10	0,12	0,05	0,08	0,10	0,12	0,05	0,08	0,10	0,12
0,05	0,100	0,100	0,100	0,100	0,050	0,050	0,050	0,050	0,042	0,042	0,042	0,042
0,06	0,208	0,208	0,208	0,208	0,104	0,104	0,104	0,104	0,087	0,087	0,087	0,087
0,08	0,425	0,425	0,425	0,425	0,212	0,212	0,212	0,212	0,174	0,174	0,174	0,174
0,10	0,651	0,651	0,651	0,651	0,326	0,326	0,326	0,326	0,269	0,269	0,269	0,269
0,12	0,768	0,768	0,768	0,768	0,384	0,384	0,384	0,384	0,315	0,315	0,315	0,315
0,14	0,889	0,889	0,889	0,889	0,440	0,440	0,440	0,440	0,366	0,366	0,366	0,366
0,16	1,000	1,000	1,000	1,000	0,500	0,500	0,500	0,500	0,414	0,414	0,414	0,414
0,18	1,000	1,000	1,000	1,000	0,562	0,562	0,562	0,562	0,461	0,461	0,461	0,461
0,20	1,000	1,000	1,000	1,000	0,625	0,625	0,625	0,625	0,512	0,512	0,512	0,512
0,22	1,000	1,000	1,000	1,000	0,688	0,688	0,688	0,688	0,563	0,563	0,563	0,563
0,24	1,000	1,000	1,000	1,000	0,752	0,752	0,752	0,752	0,614	0,614	0,614	0,614
0,26	1,000	1,000	1,000	1,000	0,816	0,816	0,816	0,816	0,665	0,665	0,665	0,665
0,28	1,000	1,000	1,000	1,000	0,880	0,880	0,880	0,880	0,716	0,716	0,716	0,716
0,30	1,000	1,000	1,000	1,000	0,944	0,944	0,944	0,944	0,767	0,767	0,767	0,767
0,32	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,818	0,818	0,818	0,818
0,34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,870	0,870	0,870	0,870
0,36	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,922	0,922	0,922	0,922
0,38	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,974	0,974	0,974	0,974
0,40	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,42	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,44	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,46	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,48	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,52	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,54	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,56	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,58	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,62	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,64	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,66	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,68	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,72	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,74	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,76	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,82	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,84	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,86	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,88	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,92	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,94	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,96	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,98	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

FLEXÃO NORMAL COMPOSTA - ESTADO LIMITE ÚLTIMO
DOMÍNIO 4a E 5



TENSÕES DEFORMAÇÕES

$$y = 0,18x \quad f_c = \frac{1}{x}$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} + \frac{M}{I} y \quad \sigma_s' = \frac{N}{A_s'} + \frac{M}{I} y'$$

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad \epsilon_s' = \frac{\sigma_s'}{E_s'}$$

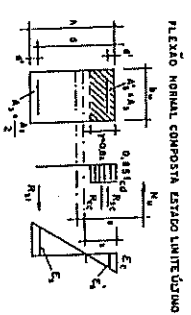
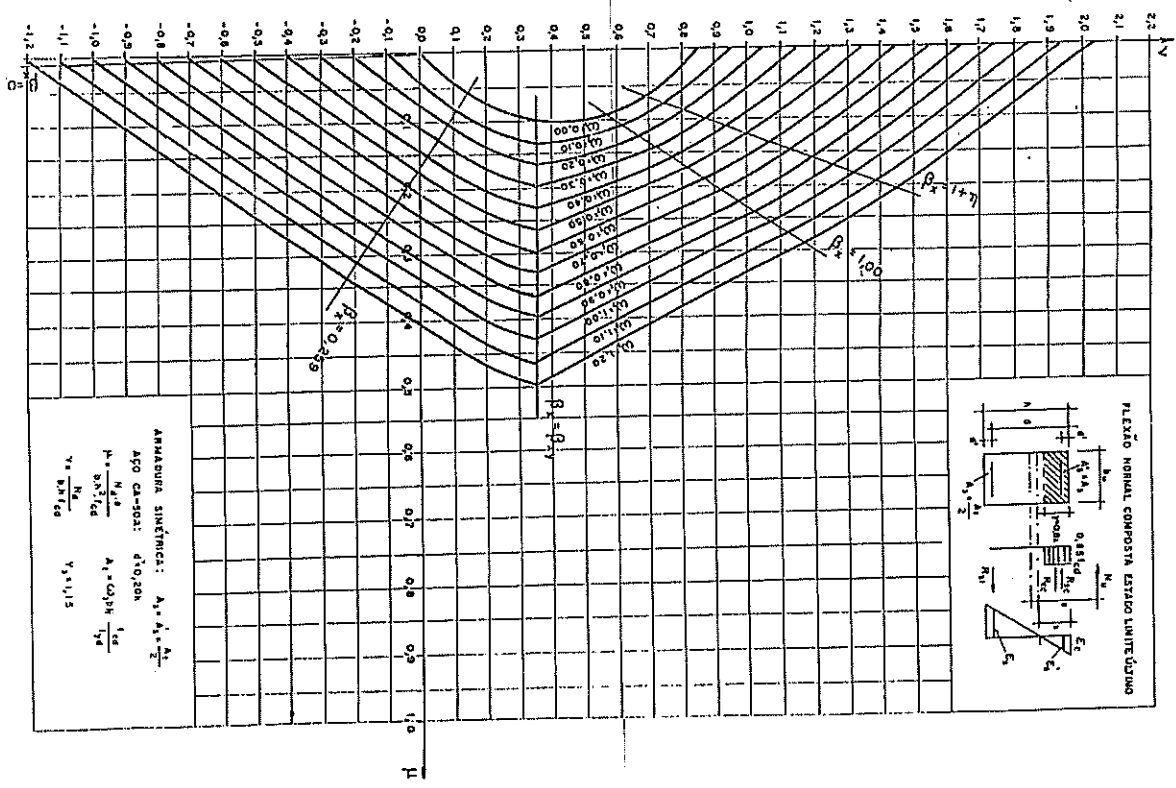
R _s = x/d	η = 0,05		η = 0,08		η = 0,10		η = 0,12		η = 0,15	
	μ	ω	μ	ω	μ	ω	μ	ω	μ	ω
1,00	0,408	0,680	0,408	0,680	0,408	0,680	0,408	0,680	0,408	0,680
1,01	0,409	0,687	0,409	0,687	0,409	0,687	0,409	0,687	0,409	0,687
1,02	0,411	0,694	0,411	0,694	0,411	0,694	0,411	0,694	0,411	0,694
1,03	0,412	0,700	0,412	0,700	0,412	0,700	0,412	0,700	0,412	0,700
1,04	0,413	0,707	0,413	0,707	0,413	0,707	0,413	0,707	0,413	0,707
1,05	0,414	0,714	0,414	0,714	0,414	0,714	0,414	0,714	0,414	0,714
1,06	0,415	0,721	0,415	0,721	0,415	0,721	0,415	0,721	0,415	0,721
1,07	0,416	0,728	0,416	0,728	0,416	0,728	0,416	0,728	0,416	0,728
1,08	0,417	0,734	0,417	0,734	0,417	0,734	0,417	0,734	0,417	0,734
1,09	0,418	0,741	0,418	0,741	0,418	0,741	0,418	0,741	0,418	0,741
1,10	0,419	0,748	0,419	0,748	0,419	0,748	0,419	0,748	0,419	0,748
1,11	0,420	0,755	0,420	0,755	0,420	0,755	0,420	0,755	0,420	0,755
1,12	0,421	0,762	0,421	0,762	0,421	0,762	0,421	0,762	0,421	0,762
1,13	0,421	0,768	0,421	0,768	0,421	0,768	0,421	0,768	0,421	0,768
1,14	0,422	0,775	0,422	0,775	0,422	0,775	0,422	0,775	0,422	0,775
1,15	0,422	0,782	0,422	0,782	0,422	0,782	0,422	0,782	0,422	0,782
1,20	0,424	0,816	0,424	0,816	0,424	0,816	0,424	0,816	0,424	0,816
1,25	0,425	0,850	0,425	0,850	0,425	0,850	0,425	0,850	0,425	0,850
1,30	0,424	0,884	0,424	0,884	0,424	0,884	0,424	0,884	0,424	0,884
1,3125	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
1,35	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
1,3750	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
1,40	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
1,4375	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
1,45	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
1,50	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
2,00	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
5,00	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893
10,00	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893	0,424	0,893

DOMÍNIO 4a DOMÍNIO 5

FLEXÃO NORMAL COMPOSTA - ESTADO LIMITE ÚLTIMO
DOMÍNIO 4a E 5

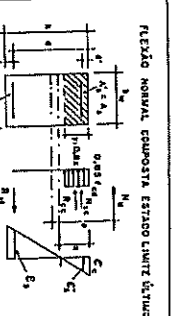
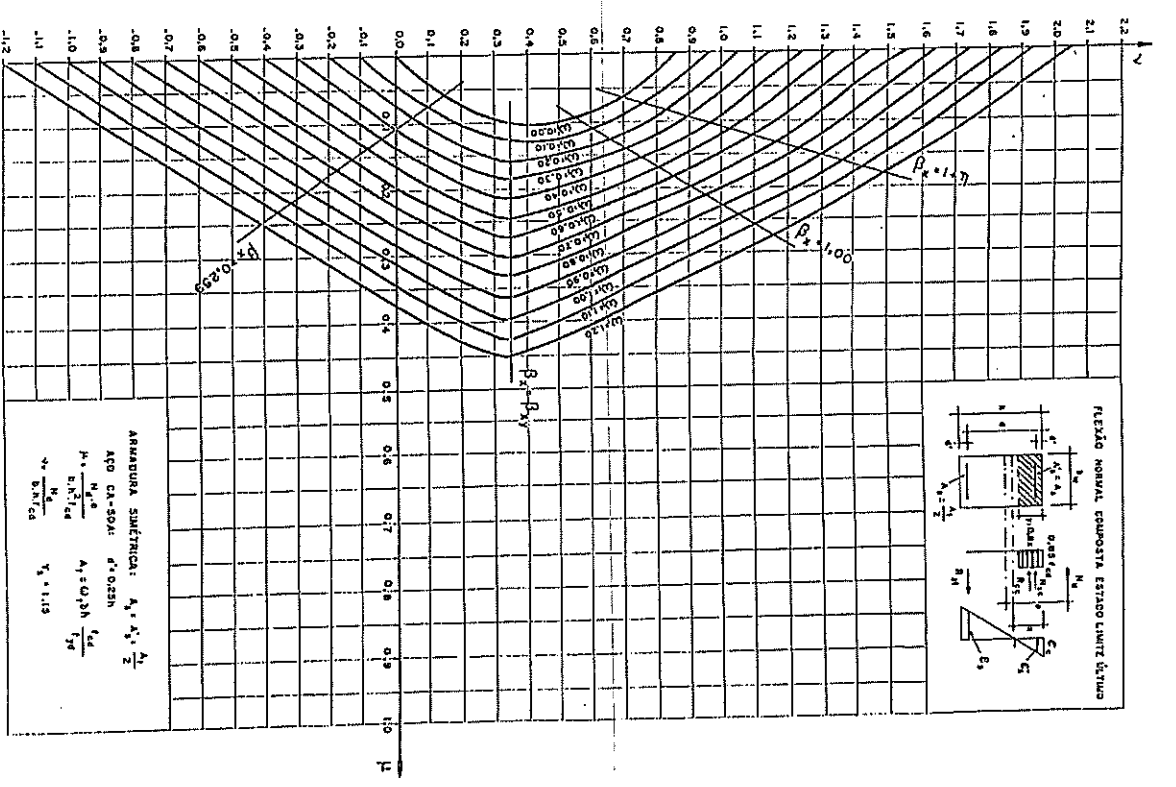
Valores da relação σ_s / f_{sd}

R _s = x/d	CA-35					CA-50					CA-60				
	Para valores de η					Para valores de η					Para valores de η				
	0,05	0,08	0,10	0,12	0,15	0,05	0,08	0,10	0,12	0,15	0,05	0,08	0,10	0,12	0,15
1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,02	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033
1,04	0,130	0,130	0,130	0,130	0,130	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065
1,06	0,190	0,191	0,191	0,191	0,191	0,095	0,096	0,096	0,096	0,096	0,096	0,096	0,096	0,096	0,096
1,08	0,245	0,250	0,250	0,250	0,250	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
1,10	0,297	0,303	0,307	0,307	0,307	0,152	0,152	0,152	0,152	0,152	0,152	0,152	0,152	0,152	0,152
1,12	0,346	0,353	0,357	0,357	0,357	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173
1,14	0,392	0,399	0,404	0,410	0,413	0,196	0,196	0,196	0,196	0,196	0,196	0,196	0,196	0,196	0,196
1,16	0,435	0,443	0,449	0,454	0,458	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218	0,218
1,18	0,477	0,483	0,489	0,494	0,497	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238
1,20	0,515	0,524	0,529	0,534	0,538	0,256	0,256	0,256	0,256	0,256	0,256	0,256	0,256	0,256	0,256
1,22	0,552	0,561	0,568	0,575	0,585	0,281	0,281	0,281	0,281	0,281	0,281	0,281	0,281	0,281	0,281
1,24	0,587	0,597	0,604	0,610	0,621	0,295	0,295	0,295	0,295	0,295	0,295	0,295	0,295	0,295	0,295
1,26	0,620	0,630	0,637	0,644	0,655	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310
1,28	0,652	0,662	0,669	0,676	0,687	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326
1,30	0,682	0,692	0,700	0,707	0,718	0,341	0,341	0,341	0,341	0,341	0,341	0,341	0,341	0,341	0,341
1,32	0,711	0,721	0,729	0,736	0,748	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356
1,34	0,738	0,749	0,756	0,764	0,776	0,369	0,369	0,369	0,369	0,369	0,369	0,369	0,369	0,369	0,369
1,36	0,765	0,775	0,783	0,790	0,802	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
1,38	0,789	0,800	0,808	0,816	0,828	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395
1,40	0,813	0,825	0,832	0,840	0,852	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407	0,407
1,42	0,837	0,848	0,856	0,863	0,875	0,418	0,418	0,418	0,418	0,418	0,418	0,418	0,418	0,418	0,418
1,44	0,859	0,870	0,878	0,886	0,897	0,429	0,429	0,429	0,429	0,429	0,429	0,429	0,429	0,429	0,429
1,46	0,880	0,891	0,899	0,907	0,919	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440
1,48	0,900	0,912	0,920	0,927	0,939	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450	0,450
1,50	0,920	0,931	0,939	0,947	0,959	0,460	0,460	0,460	0,460	0,460	0,460	0,460	0,460	0,460	0,460
1,60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504
1,70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,541	0,541	0,541	0,541	0,541	0,541	0,541	0,541	0,541	0,541
1,80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,572	0,572	0,572	0,572	0,572	0,572	0,572	0,572	0,572	0,572
1,90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600
2,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,623	0,623	0,623	0,623	0,623	0,623	0,623	0,623	0,623	0,623
2,50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,707	0,711	0,714	0,718	0,722	0,726	0,730	0,734	0,738	0,742
3,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
3,50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,792	0,795	0,797	0,800	0,803	0,806	0,809	0,812	0,815	0,818
4,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,816	0,818	0,821	0,823	0,825	0,828	0,830	0,832	0,834	0,836
4,50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,835	0,837	0,839	0,841	0,843	0,845	0,847	0,849	0,851	0,853
5,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,849	0,851	0,852	0,854	0,856	0,858	0,860	0,862	0,864	0,866
6,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,870	0,872	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
7,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,883	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901
8,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,896	0,898	0,899	0,901	0,903	0,905	0,907	0,909	0,911	0,913
9,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,906	0,908	0,909	0,911	0,913	0,915	0,917	0,919	0,921	0,923
10,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,910	0,912	0,914	0,916	0,918	0,920				



ARMADURA SIMÉTRICA: $A_1 = A_2 = A_3$
 AÇO CA-50A: $d = 0,208$
 $f_c = \frac{N_c}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$ $A_1 = \frac{Q_1 \cdot h}{f_{yd}}$
 $v = \frac{N_s}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$ $v_2 = 1,15$

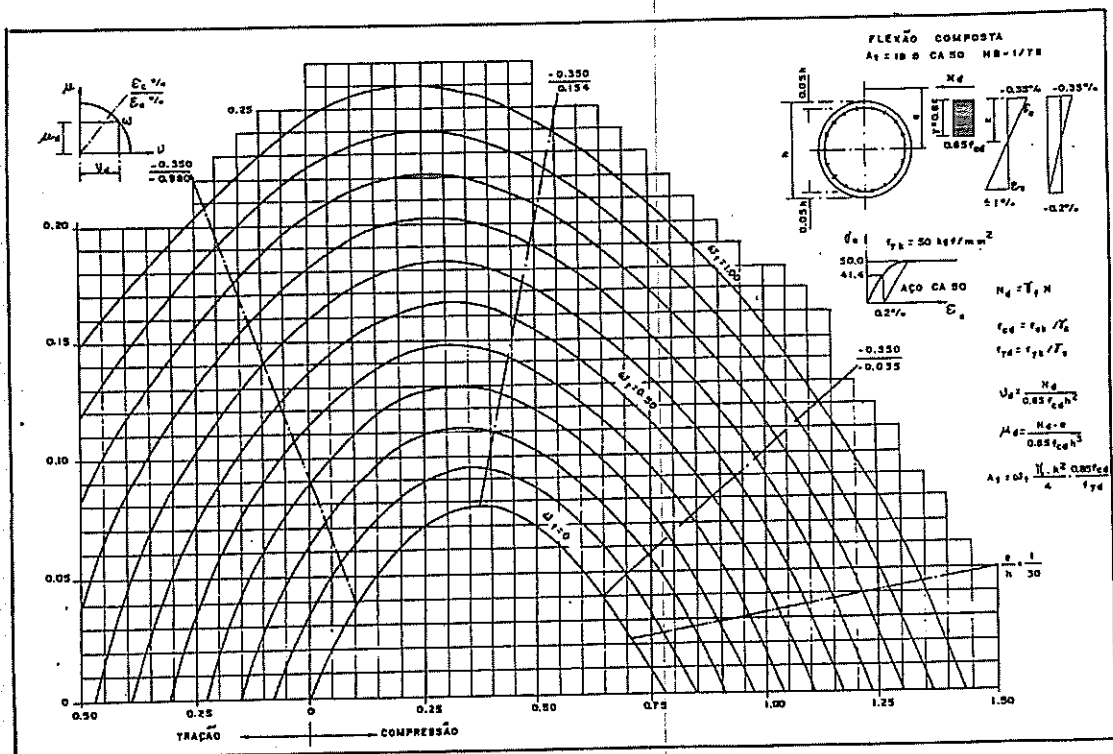
A-13



ARMADURA SIMÉTRICA: $A_1 = A_2 = A_3$
 AÇO CA-50A: $d = 0,208$
 $f_c = \frac{N_c}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$ $A_1 = \frac{Q_1 \cdot h}{f_{yd}}$
 $v = \frac{N_s}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$ $v_2 = 1,15$

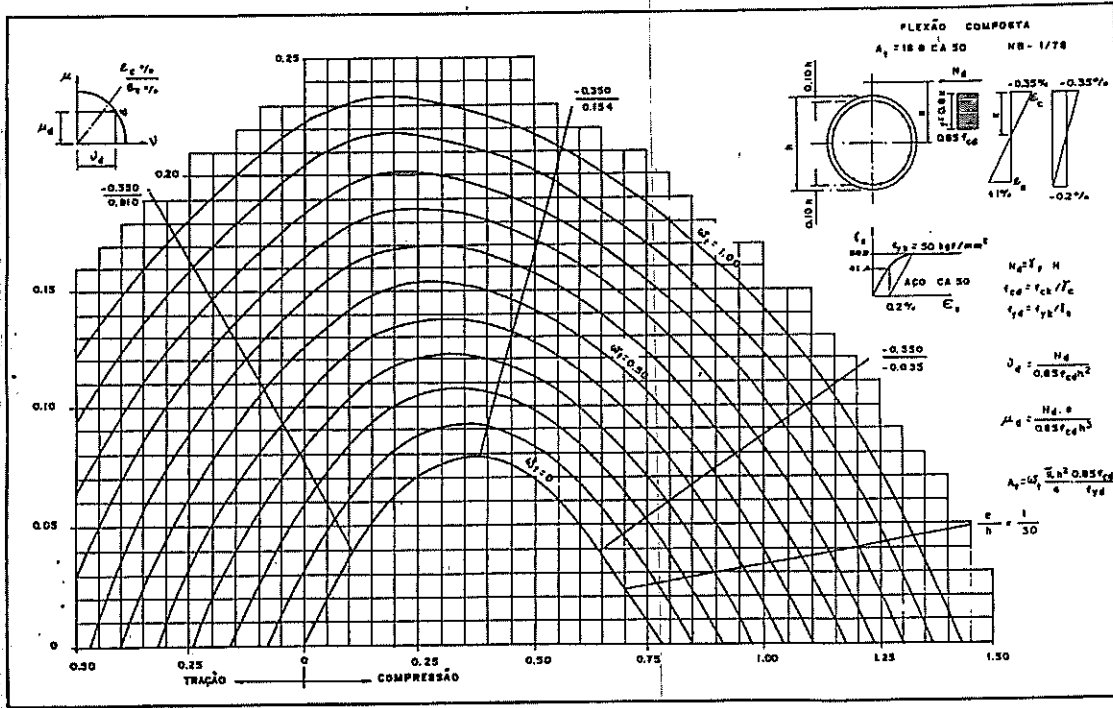
A-14

A-15

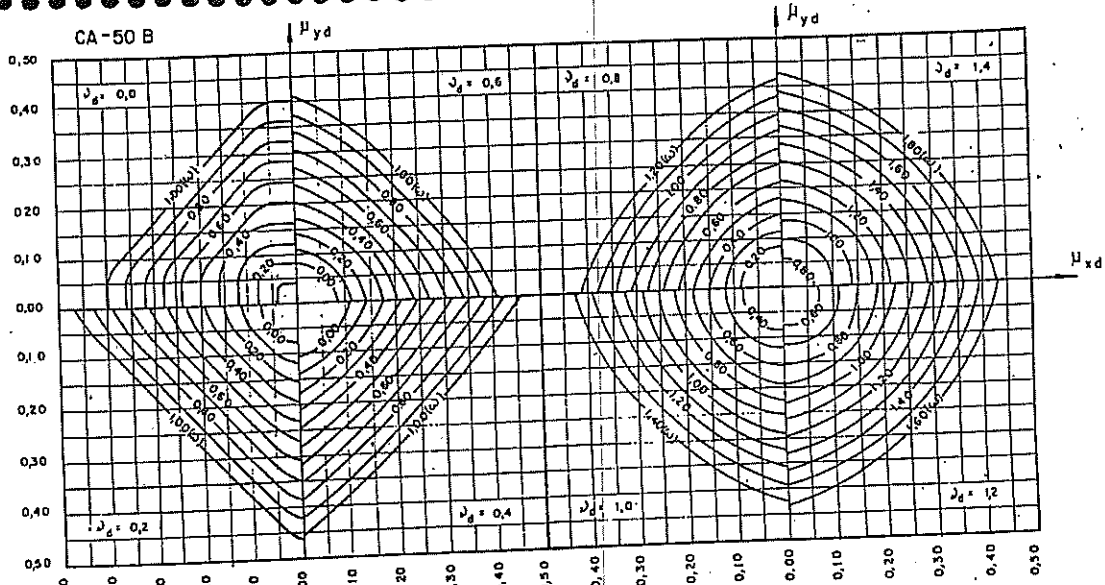


ADAPTAÇÃO DE PFEIL, W. — DIMENSIONAMENTO DE CONCRETO ARMADO À FLEXÃO COMPOSTA

A-16



ADAPTAÇÃO DE PFEIL, W. — "DIMENSIONAMENTO DE CONCRETO ARMADO À FLEXÃO COMPOSTA"



CONCRETO: DIAGRAMA PARÁBOLA-RETÂNGULO

$N_d = F_d$

$M_{xd} = F_d \cdot e_x$

$M_{yd} = F_d \cdot e_y$

$A_{s, total} = 4 \phi$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{A_c h_x f_{cd}}$

$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{A_c h_y f_{cd}}$

$j_d = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$

$\omega = \frac{A_{s, total} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$

$A_c = h_x \cdot h_y$

$A_{s, total} = 4 \phi$

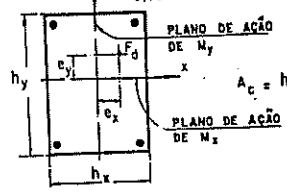
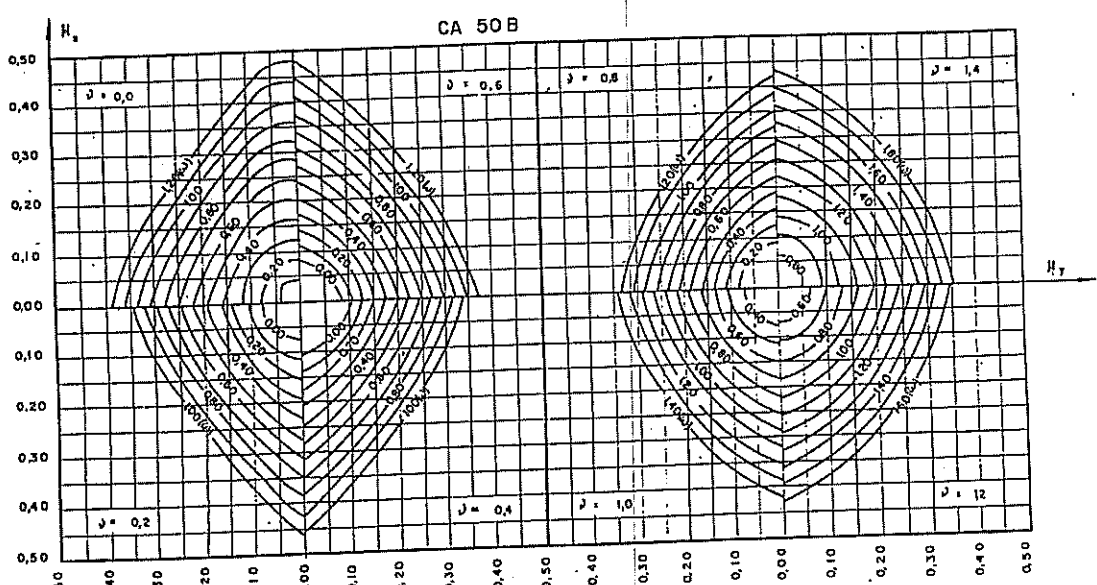


Fig. 4.1.2.2 Diagramas de interação.

EXTRAÍDO DE: P. B. FUSCO - ESTRUTURAS DE CONCRETO/SOLICITAÇÕES NORMAIS



CONCRETO: DIAGRAMA PARÁBOLA-RETÂNGULO

$N_d = F_d$

$M_{xd} = F_d \cdot e_x$

$M_{yd} = F_d \cdot e_y$

$A_{s, total} = 6 \phi$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{A_c h_x f_{cd}}$

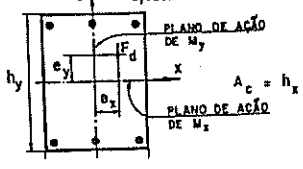
$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{A_c h_y f_{cd}}$

$j_d = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$

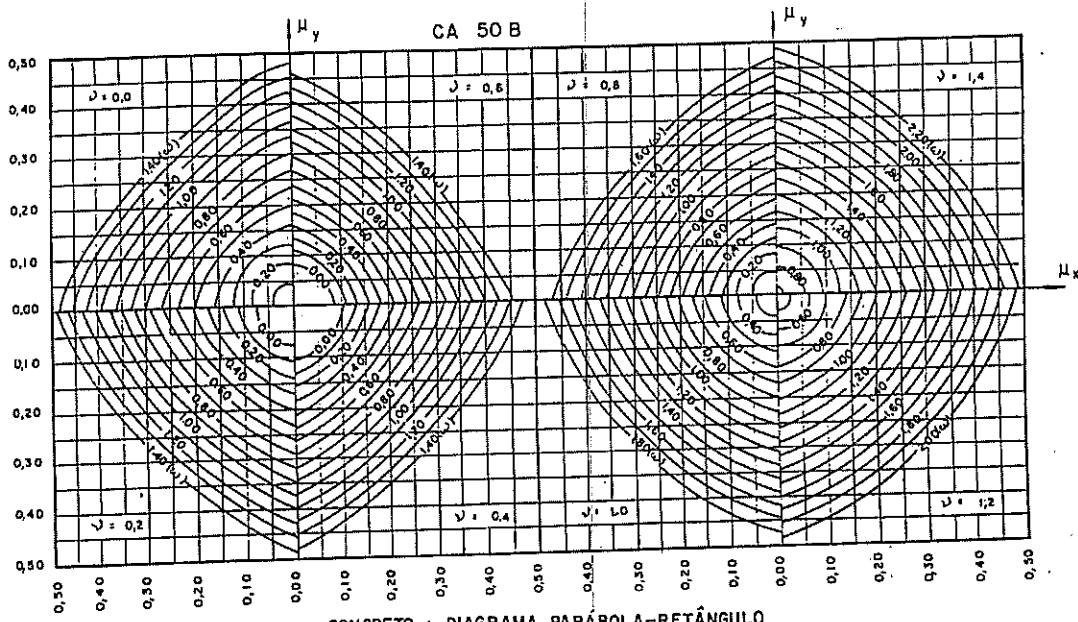
$\omega = \frac{A_{s, total} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$

$A_c = h_x \cdot h_y$

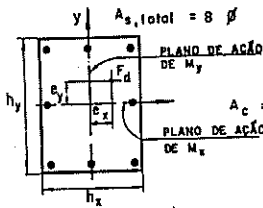
$A_{s, total} = 6 \phi$



EXTRAÍDO DE: P. B. FUSCO - ESTRUTURAS DE CONCRETO/SOLICITAÇÕES NORMAIS



CONCRETO : DIAGRAMA PARÁBOLA-RETÂNGULO



$$N_d = F_d$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{A_c h_x f_{cd}}$$

$$M_{xd} = F_d e_x$$

$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{A_c h_y f_{cd}}$$

$$M_{yd} = F_d e_y$$

$$\lambda_d = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$A_{s,totol} = 8 \phi$$

$$\omega = \frac{A_{s,totol} f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

Fig. 4.1.2.4 Diagramas de interação.

EXTRAÍDO DE: P.B. FUSCO - E. NUTURAS DE CONCRETO / C. LICITAÇÕES NORMAIS

Vigas Simples - Formulário			

ELÁSTICAS DE VIGAS DE SEÇÃO CONSTANTE

Tipos de viga e carregamento	Linha elástica	Flecha máxima	Relação nas extremidades	Equação da linha elástica
		$V_{max} = \frac{Pb^2}{2EI}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{Pl^2}{24EI}$	$v = \frac{Px^2}{6EI}(3L-x)$
		$V_{max} = \frac{qL^4}{8EI}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$	$v = \frac{qx^3}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
		$V_{max} = \frac{PL^2}{2EI}$	$\theta_A = \frac{PL}{EI}$	$v = \frac{M}{2EI}x^2$
		$V_{max} = \frac{qL^4}{30EI}$	$\theta_B = \frac{qL^2}{24EI}$	$v = \frac{qx^3}{120EI}(10L^2 - 10Lx + 5Lx^2 - x^3)$
		$V_{max} = \frac{Pb^2}{48EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$	$v = \frac{Px^2}{48EI}(3L^2 - 5x^2)$
		$V_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{qL^2}{24EI}$	$v = \frac{qx}{24EI}(x^2 - 2Lx^2 + L^3)$
		$V_{max} = \frac{Pb^2}{96EI}$	$\theta_A = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EI}$ $\theta_B = \frac{Pb(L^2 - a^2)}{6EI}$	$v = \frac{Px}{6EI}(L^2 - b^2 - x^2)$ $v_{max} = \frac{Pb^2}{96EI}$
		$V_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = \frac{7qL^3}{360EI}$ $\theta_B = -\frac{qL^3}{45EI}$	$v = \frac{qx}{360EI}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$
		$V_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{qL^2}{24EI}$	$v = \frac{qx}{24EI}(x^2 - 2Lx^2 + L^3)$
		$V_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{qL^2}{24EI}$	$v = \frac{qx}{24EI}(L-x)^2$
		$V_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = \theta_B = \text{zero}$	$v = \frac{qx^2}{48EI}(2x^2 - 5Lx + 3L^2)$
		$V_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = \theta_B = \text{zero}$	$v = \frac{qx^2}{48EI}(2x^2 - 5Lx + 3L^2)$